

## TAMPRIŲ TILTO SANTVARŲ OPTIMIZAVIMAS

Ignas Rimkus<sup>1</sup>, Šarūnas Kisevičius<sup>2</sup>, Stanislovas Kalanta<sup>3</sup>

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

El. paštas: <sup>1</sup>ignasrimkus@gmail.com; <sup>2</sup>sarunas.kisevicius@gmail.com; <sup>3</sup>kal@vgtu.lt

**Santrauka.** Darbe nagrinėjami tamprių tilto santvarų optimizavimo uždaviniai, kuriais siekiama nustatyti minimalų konstrukcijos tūrį (masę), optimizuojant strypų skerspjūvius, santvaros aukštį bei tinklo struktūrą. Jie formuluojami kaip netiesiniai diskrečiojo matematinio programavimo uždaviniai. Santvaros viršutinės juostos elementai ne tik gniuždomieji elementai, bet ir lenkiamieji. Strypų skerspjūviai projektuojami iš plieninių valcuotųjų profiliuotųjų. Uždavinių matematiniai modeliai sudaromi taikant baigtinių elementų metodą ir atsižvelgiant į konstrukcijos stiprumo, standumo bei pastovumo reikalavimus. Suformuluoti uždaviniai sprendžiami iteraciniu būdu, naudojant matematinį kompiuterinį paketą MATLAB ir jo paprogramį *fmincon*. Kiekvienoje iteracijoje koreguojami gniuždomųjų elementų klupumo koeficientai. Skerspjūvių sortimento (diskretyškumo) reikalavimai užtikrinami taikant šakų ir režių metodą.

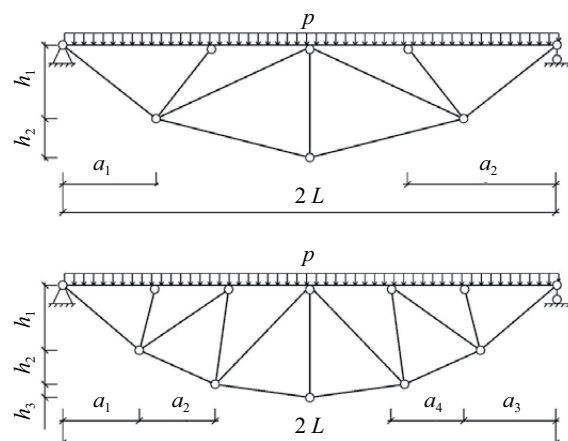
**Reikšminiai žodžiai:** tamprios plieninės santvaros, baigtiniai elementai, netiesinis optimizavimo uždavinys.

## Įvadas

Nagrinėjamas tamprių tilto santvarų su nekarpyta viršutine juosta (1 pav.) aukščio ir elementų skerspjūvių optimizavimo uždavinys, siekiant minimizuoti konstrukcijos masę (tūrį). Paprasčiausi santvarų, kurių strypai sujungti lankstais, optimizavimo uždaviniai jau buvo formuluojami ir sprendžiami darbuose (Maciulevičius 1964, 1966; Majid 1974; Haug, Arora 1980; Rao 1996). Juose projektuojami strypų skerspjūviai dar neapibrėžtos formos. Darbuose (Maciulevičius 1964, 1966) optimizuojami santvaros strypų skerspjūviai ir struktūra (strypų išdėstymas) esant žinomoms mazgų koordinatėms, laikantis prielaidos, jog visų gniuždomųjų strypų liaunis arba skerspjūvio spindulys yra vienodas. Dėl šių prielaidų gaunamas tiesinio programavimo uždavinys. Straipsniuose (Kalanta *et al.* 2009; Goremikins, Serdjuks 2010) jau nagrinėjami santvarų, kurių viršutinės juostos elementai ne tik gniuždomieji, bet ir lenkiamieji, optimizavimo uždaviniai. Projektavimo parametrai yra strypų skerspjūvio plotai ir santvaros aukštis. Optimizavimo parametrai nustatomi atlikus variantinių įvairaus fiksuoto aukščio santvaros projektavimą taikant kompiuterines projektavimo programas. Projektuojami stačiakampiai skerspjūviai esant fiksuotam aukščio ir pločio santykiui bei vienam apkrovų deriniui (Goremikins, Serdjuks 2010) ir skerspjūviai iš plieninių profiliuotųjų (Kalanta *et al.* 2009), jau atsižvelgiant į 3 apkrovų derinius. Straipsnyje (Ulitas, Kalanta 2010) santvaros (strypai tik tempiami ar gniuždomi) aukščio optimizavimo uždavinys jau formuluojamas ir sprendžiamas kaip netiesinis matematinio programavimo uždavinys.

Šio darbo tikslas plėtoti tamprių santvarų, kuriose gali būti ir lenkiamųjų elementų, aukščio ir strypų skerspjūvių optimizavimo uždavinių matematinis modelius bei sprendimo algoritmus; jais remiantis nustatyti 1 pav. parodytų santvarų optimalius matmenis bei strypų skerspjūvio plotus. Uždavinių matematiniai modeliai formuluojami ir sprendžiami kaip netiesiniai diskrečiojo matematinio programavimo uždaviniai. Jie sudaromi taikant baigtinių elementų metodą (Kalanta 1995), atsižvelgiant į stiprumo, standumo ir stabilumo reikalavimus (STR... 2005). Strypų skerspjūviai projektuojami iš standartinių plieninių profiliuotųjų.

Pastaruoju metu netiesiniams konstrukcijų optimizavimo uždaviniams spręsti yra sukurta įvairių specifinių genetinių (Hayalioglu 2000; Hayalioglu,



1 pav. Santvarų skaičiuojamosios schemas  
Fig. 1. Computational schemes of trusses

Degertekin 2004; Zheng *et al.* 2006), diskrečiojo optimizavimo (Gutkowski 1997) ir kitokių optimizavimo algoritmų (Manickarajah *et al.* 2000; Yuge *et al.* 1999; Feng *et al.* 2006; Karkauskas 2007). Tačiau suformuluotų optimizavimo uždavinių sprendiniai nustatomi naudojant Matlab'o netiesinių matematinio programavimo uždavinių sprendimo programą. Uždaviniai sprendžiami iteraciniu būdu kiekvienoje iteracijoje koreguojant gniuždomųjų elementų klupumo koeficientus. Skerspjūvių diskretiškumo reikalavimai užtikrinami taikant šakų ir rėžių metodą.

### Konstrukcijos pagrindinės priklausomybės

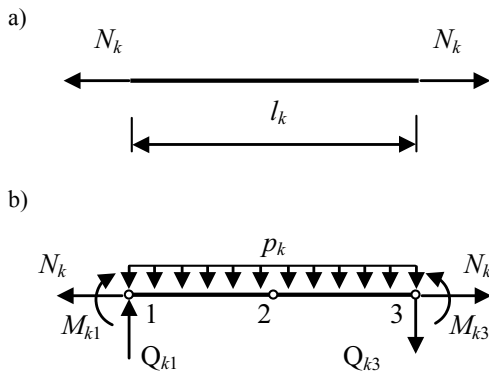
**Diskretinis modelis.** Nagrinėjama santvara, kurios mazgų koordinatės nežinomos (1 pav.). Bet kokiai strypinei konstrukcijai modeliuoti yra sukurta keturių tipų pusiausvireji baigtiniai elementai (Kalanta 2007). Tačiau straipsnyje nagrinėjamos santvaros modeliuojamos dviejų tipų elementais  $k = 1, 2, \dots, r$ :

1) tempiamuoju ar gniuždomuoju elementu (2 pav., a), kuri veikia ašinė jėga  $N_k(x) = N_k$ ;

2) lenkiamuoju ir tempiamuoju ar gniuždomuoju elementu su trimis mazgais (2 pav., b), kuriame  $N_k(x) = N_k$ , o lenkimo momentai aprašomi paraboline funkcija

$$M_k(x) = \left(1 - \frac{3x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2}\right)M_{k1} + \left(\frac{4x}{l_k} - \frac{4x^2}{l_k^2}\right)M_{k2} + \left(-\frac{x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2}\right)M_{k3} = \sum_{j=1}^3 H_{kj}(x)M_{kj}, \quad (1)$$

čia  $H_{kj}(x)$  – lenkimo momentų formos funkcija;  $M_{kj}$  – elemento  $j$ -ojo mazgo lenkimo momentas;  $x$  – pjūvio koordinatė.



2 pav. Baigtiniai elementai: a) tempiamasis ar gniuždomasis; b) antros eilės lenkiamasis ir tempiamasis ar gniuždomasis

Fig. 2. Finite elements: a) tension or compression; b) bending and tension or compression

Apibendrintai bet kurio  $k$ -tojo elemento išrašos aprašomos interpoliavimo funkcija:

$$S_k(x) = [H_k(x)]S_k, \quad (2)$$

čia  $S_k$  – elemento mazgų išrašų vektorius;  $[H_k(x)]$  – išrašų interpoliavimo matrica, sudaryta iš išrašų formos funkcijų  $H_{kj}(x)$ . Tempiamajam ar gniuždomajam elementui  $S_k = N_k$ ,  $[H_k(x)] = 1$ , o antros eilės elementui (Kalanta 2007):

$$S_k = [M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, N_k]^T, \\ [H_k(x)] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2} & \frac{4x}{l_k} - \frac{4x^2}{l_k^2} & -\frac{x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Pagrindinės priklausomybės.** Konstrukcijos pagrindinės priklausomybės – pusiausvyros ir geometrinės lygtys, stiprumo ir stabilumo sąlygos. Diskretinio modelio **pusiausvyros** lygtis sudaro dvi lygčių grupės:

– *mazgų pusiausvyros lygtys*, nusakančios ryšį tarp mazge sujungtų elementų išrašų ir mazguose veikiančių išorinių jėgų. Jos sudaromos konstrukcijos mazgams galimų poslinkių kryptimis. Bendroju atveju – tai mazgus veikiančių lenkimo momentų ir jėgų projekcijų pusiausvyros lygtys:

$$\sum M_j = F_{mi}, \quad \sum Q_j + \sum N_j = F_i,$$

čia  $F_{mi}, F_i$  –  $i$ -tojo poslinkio kryptimi veikiantis išorinis momentas bei sutelktoji jėga;

– *lenkiamųjų elementų pusiausvyros lygtys*, nusakančios ryšį tarp elemento mazginių išrašų ir išorinės elementą veikiančios apkrovos; jos sudaromos tik paskirstytosios apkrovos veikiamiems elementams, t. y. antrojo tipo elementams. Šių elementų vidinių jėgų pusiausvyra aprašoma tokiomis lygtimis (Kalanta 2007):

$$\frac{4}{l_k^2}(-M_{k1} + 2M_{k2} - M_{k3}) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

čia  $p_k$  – elementą veikiančios apkrovos intensyvumas;  $l_k$  –  $k$ -tojo elemento ilgis. Ši lygtis gauta iš lenkiamojo elemento diferencialinės pusiausvyros lygties

$$-\frac{dM_k(x)}{dx} = p_k,$$

atsižvelgiant į lenkimo momento funkciją (1).

Sudarius pusiausvyros lygtis visiems baigtiniams elementams ir visiems mazgams ir eliminuojant skersines jėgas

$$Q_{k1} = (-3M_{k1} + 4M_{k2} - M_{k3})/l_k,$$

$$Q_{k3} = (M_{k1} - 4M_{k2} + 3M_{k3})/l_k,$$

gaunama pusiausvyros lygčių sistema:

$$[A(\mathbf{l})]\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (4)$$

čia  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_r]$  – konstrukcijos įrašų vektorius, sudarytas iš elementų įrašų vektorių  $\mathbf{S}_k$ ;  $\mathbf{F}$  – išorinių jėgų vektorius;  $\mathbf{l}$  – optimizuojamų santvaros matmenų vektorius. Matricos  $[A(\mathbf{l})]$  kai kurie koeficientai nežinomi, todėl pusiausvyros lygtys (4) yra netiesinės.

**Geometrinės** lygtys, siejančios konstrukcijos mazgų poslinkius  $\mathbf{u}$  su strypų deformacijomis  $\Theta$ , sudaromos remiantis virtualių jėgų principu. Tarkime, kad išorinės ir vidinės jėgos įgijo statiškaai galimus priešingus  $\delta\mathbf{F}$  ir  $\delta\mathbf{S}$ , tenkinančius pusiausvyros lygtį  $[A(\mathbf{l})]\delta\mathbf{S} = \delta\mathbf{F}$ . Tuomet remiantis virtualių jėgų principu galioja tokia išorinių ir vidinių jėgų darbų lygybė

$$\delta\mathbf{F}^T \mathbf{u} = \delta\mathbf{S}^T [A(\mathbf{l})]^T \mathbf{u} = \delta\mathbf{S}^T \Theta.$$

Kadangi virtualios jėgos  $\delta\mathbf{S}$  gali būti bet kokios, tai turi galioti deformacijų ir poslinkių darnos lygtis

$$\Theta = [A(\mathbf{l})]^T \mathbf{u}$$

arba, atsižvelgiant į fizikines lygtis  $\Theta = [D(A_0, \mathbf{l})]\mathbf{S}$ ,

$$[D(A_0, \mathbf{l})]\mathbf{S} - [A(\mathbf{l})]^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

čia  $[D(A_0, \mathbf{l})] = \text{diag}[D_k(A_k, \mathbf{l})]$ , o

$$[D_k(A_k, \mathbf{l})] = \int_0^{l_k} [H_k(x)]^T [d_k] [H_k(x)] dx \quad (6)$$

yra  $k$ -tojo elemento pasiduodamumo matrica;  $[d_k]$  – strypo be galo mažo elemento pasiduodamumo matrica. Matricos  $[D_k(A_k, \mathbf{l})]$  koeficientai skaičiuojami pagal formulę:

$$d_{ij} = d_k \int_0^{l_k} H_{ki}(x) H_{kj}(x) dx, \text{ kur tempiant ar gniuždant}$$

$d_k = 1/EA_k$ , o lenkiant  $d_k = 1/EI_k$ ;  $I_k$  – skerspjūvio inercijos momentas,  $E$  – tamprumo modulis. Tempiamojo ar gniuždomojo elemento pasiduodamumo matrica  $[D_k(A_k, \mathbf{l})] = l_k / EA_k$ , o lenkiamojo ir tempiamojo ar gniuždomojo elemento (Kalanta 2007):

$$[D_k(A_k, \mathbf{l})] = l_k \begin{bmatrix} \frac{2}{15EI_k} & \frac{1}{15EI_k} & -\frac{1}{30EI_k} & 0 \\ \frac{1}{15EI_k} & \frac{8}{15EI_k} & \frac{1}{15EI_k} & 0 \\ -\frac{1}{30EI_k} & \frac{1}{15EI_k} & \frac{2}{15EI_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EA_k} \end{bmatrix}.$$

**Stiprumo ir pastovumo sąlygos.** Lenkiamojo ir tempiamojo (ar gniuždomojo) strypo  $j$ -ojo pjūvio stiprumo sąlyga aprašoma nelygybe

$$\sigma_{j,\max} = \frac{|N_j|}{A_j} + \frac{|M_j|}{W_j} \leq R, \quad (7)$$

čia  $A_j, W_j$  – skerspjūvio plotas ir atsparumo momentas;  $R$  – medžiagos skaičiuojamasis stipris (įvertinus patikimumo koeficientą). Padauginus iš  $A_j$ , gaunama tokia stiprumo sąlyga:

$$|N_j| + c_j |M_j| \leq RA_j = N_{0j}$$

arba

$$\begin{aligned} N_j + c_j M_j - RA_j &\leq 0, & -N_j + c_j M_j - RA_j &\leq 0, \\ N_j - c_j M_j - RA_j &\leq 0, & -N_j - c_j M_j - RA_j &\leq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

čia  $c_j = A_j / W_j$ ,  $N_{0j} = RA_j$  – skaičiuojamoji ašinė jėga, nusakanti tampraus skerspjūvio laikomąją galią. Šios stiprumo sąlygos tikrinamos visuose baigtinių elementų mazguose ir paskirstytosios apkrovos lenkiamųjų elementų pavojuose pjūviuose, kur lenkimo momentas didžiausias. Pavojuo pjūvio koordinatė

$$x = \frac{(3M_{k1} - 4M_{k2} + M_{k3})l_k}{(4M_{k1} - 8M_{k2} + 4M_{k3})}$$

nustatoma iš sąlygos  $Q = dM_k(x) / dx = 0$ . O pavojuo pjūvio lenkimo momentas

$$M_{kx} = b_1 M_{k1} + b_2 4M_{k2} + b_3 M_{k3},$$

$$\text{čia } b_1 = 1 - \frac{3x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2}, \quad b_2 = \frac{4x}{l_k} - \frac{4x^2}{l_k^2}, \quad b_3 = -\frac{x}{l_k} + \frac{2x^2}{l_k^2}.$$

Visų konstrukcijos elementų stiprumo sąlygos aprašomos nelygybe:

$$[\Phi_s(A_0)]\mathbf{S} - [G_s]A_0 \leq \mathbf{0}, \quad (9)$$

čia  $A_0$  – optimizuojamų skerspjūvio plotų vektorius. Nenuliniai matricos  $[G_s]$  elementai lygūs sandaugoms  $RA_j$ .

Be to, gniuždomieji strypai dar turi tenkinti stabilumo sąlygą:

$$\frac{|N_j|}{\phi_j A_j} \leq R_{st} \text{ arba } -N_j \leq \phi_j A_j R_{st}. \quad (10)$$

Centriškai ir necentriškai gniuždomų strypų klupumo koeficientas  $\phi_j$  nustatomas pagal statybos techninį reglamentą (STR... 2005). Visų gniuždomųjų elementų stabilumo sąlygos aprašomos analogiška nelygybe:

$$[\Phi_p]\mathbf{S} - [G_p(\phi)]A_0 \leq \mathbf{0}. \quad (11)$$

Nenuliniai matricos  $[G_p(\phi)]$  elementai lygūs sandaugoms  $\phi_j A_j R_{st}$ .

Sujungus (9) ir (11) sąlygas, gaunama nelygybė

$$[\Phi(A_0)]S - [G(\varphi)]A_0 \leq \mathbf{0}, \quad (12)$$

aprašanti konstrukcijos stiprumo ir stabilumo sąlygas.

#### Standumo sąlygos

$$[E]u \leq u^+ \quad (13)$$

aprašomos konstrukcijos mazgų poslinkių ribojimais  $u_i \leq u_i^+$ , čia  $u_i^+$  –  $i$ -tojo poslinkio leistinoji maksimali reikšmė.

### Optimizavimo uždavinio matematinis modelis ir sprendimo algoritmas

**Matematinis modelis.** Nagrinėjama apkrovos derinių  $v = 1, 2, \dots, p$  veikiamą strypinę konstrukciją, kurios strypai projektuojami iš plieninių valcuotųjų profiliuotųjų aibės  $\Pi$ . Tegul konstrukcijos strypų skerspjūvio plotai aprašomi vektoriumi  $A_0$ , o jos  $v$ -tajį derinį atitinkanti apkrova, įrašos ir poslinkiai nusakomi vektoriais  $F_v$ ,  $S_v$ ,  $u_v$ . Suprantama, kad visi šie vektoriai turi tenkinti konstrukcijos pusiausvyros ir geometrinės lygtis, stiprumo, pastovumo bei standumo sąlygas, taip pat profiliuotųjų sortimento bei konstruktyvinius reikalavimus. Taigi, atsižvelgiant į aprašytas priklausomybes, tamprios minimalaus tūrio (masės) konstrukcijos projektavimo uždavinys išreiškiamas tokiu matematinio modeliu:

$$\min f = L(I)^T A_0, \quad (14)$$

kai

$$\begin{aligned} [A(I)]S_v &= F_v, \\ [D(A_0, I)]S_v - [A(I)]^T u_v &= \mathbf{0}, \\ [\Phi(A_0)]S_v - [G(\varphi)]A_0 &\leq \mathbf{0}, \\ [E]u_v &\leq u^+, \quad A_0 \geq A_0^-; \quad A_0 \in \Pi, \\ v &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (15)$$

Pagrindiniai nežinomieji šiame modelyje yra vektoriai  $A_0, h, u_v, S_v, k = 1, 2, \dots, r$ ; čia  $I$  – santvaros aukščio parametru  $h_j$  ir ilgio parametru  $a_j$  vektorius;  $A_0 \geq A_0^-$  – konstruktyviniai skerspjūvių ribojimai. Kadangi nagrinėjama santvarų geometrija apibrėžta tik iš dalies, tai strypų ilgių vektorius  $L(I)$  bei statikos lygčių matrica  $[A(I)]$  ir geometrinių lygčių pasiduođdamumo matrica  $[D(A_0, I)]$  taip pat yra nežinomi. Matricos  $[\Phi(A_0)]$  submatrica  $[\Phi_s(A_0)]$  priklauso nuo strypų skerspjūvio plotų, nes į ją įeina koeficientai  $c_j = A_j / W_j$ , o matricos  $[G(\varphi)]$  submatrica  $[G_p(\varphi)]$  priklauso nuo klupumo koeficientų  $\varphi$ , kurių reikšmės yra elementų liaunio (lenkiamųjų elementų ir įrašų) funkcijos. Taigi (14)–(15) uždavinio tikslo

funkcija, pusiausvyros ir geometrinės lygtys bei stiprumo ir pastovumo sąlygos yra netiesinės. Skerspjūvių plotai  $A_j$  turi būti imami iš skerspjūvių aibės  $\Pi$ , t. y. iš profiliuotųjų sortimento. Todėl optimizavimo uždavinio matematinis modelis yra netiesinis diskrečiojo programavimo uždavinys, kuriame ieškoma tokių konstrukcijos aukščio parametru  $h_j$ , ilgio parametru  $a_j$  ir strypų skerspjūvių  $A_j$ , kurie atitinka jų minimalų tūrį (masę) ir jų stiprumo, standumo bei pastovumo reikalavimus.

**Sprendimo algoritmas.** Uždavinio (14)–(15) sprendinys nustatomas iteraciniu būdu. Pirmoje iteracijoje pasirenkamos bet kokios gniuždomųjų elementų klupumo koeficientų  $\varphi$  ir stiprumo sąlygų koeficientų  $c_j$  reikšmės. Koeficientų  $c_j = A_j / W_j$  reikšmės galima apskaičiuoti pasirinkus tam tikrus profiliuotuosius.

Kitose iteracijose, atsižvelgiant į ankstesnėje iteracijoje nustatytas ir gautas elementų skerspjūvio plotų reikšmes, pasirenkami tam tikri profiliuotieji su juos atitinkančiais rodikliais. Klupumo koeficientų reikšmės nustatomos priklausomai nuo gniuždomųjų elementų liaunio, kuris apskaičiuojamas pasirinkus jų skerspjūvius  $A_j$  iš profiliuotųjų sortimento. Necentriškai gniuždomų elementų klupumo koeficientų reikšmės apskaičiuojamos dar ir atsižvelgiant į ekscentricitetą. Koeficientų  $c_j$  reikšmės nustatomos pagal formulę  $c_j = A_j / W_j$ . Profiliuotųjų sortimento reikalavimai įvykdomi taikant šakų ir rėžių metodą (Kalanta 2007). Iteracinis procesas baigiamas, kai iteracijoje gautos vektorių  $A_0, I$  reikšmės sutampa su pasirinktomis.

### Tilto santvaros optimizavimo rezultatai

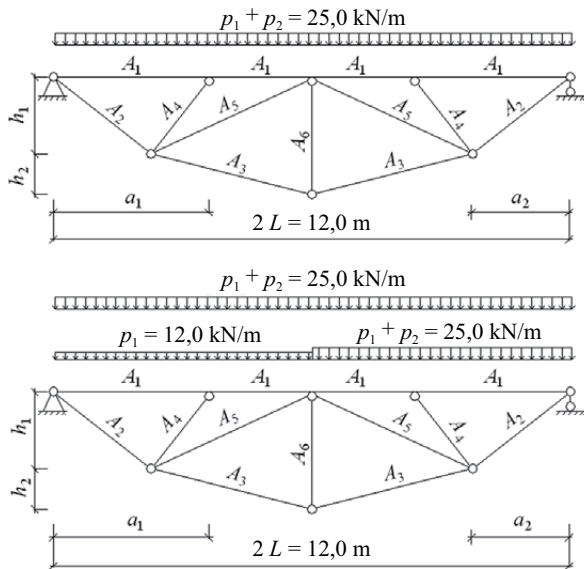
Nagrinėjama tilto santvara su nekarpyta viršutine juosta (3 pav.), jos ilgis  $2L = 12$  m. Ji veikiamą viena paskirstytą nuolatinę apkrovą  $p_1 = 12$  kN/m ir laikinos apkrovą  $p_2 = 13$  kN/m. Plieno tampnumo modulis  $E = 20500$  kN/cm<sup>2</sup>, skaičiuotinis stipris  $R = f_y \gamma_c / \gamma_m = 35,5 \cdot 0,9 / 1,1 = 29$  kN/cm<sup>2</sup>. Nustatomi optimalūs projektai veikiant 2 apkrovimo deriniams:

- 1) pastovi ir laikina apkrova veikia visą tiltą; taigi tiltas veikiamas apkrovos  $p = p_1 + p_2 = 25$  kN/m;
- 2) pastovi apkrova veikia visą tiltą, o laikina tik vieną jo pusę.

Viršutinės juostos elementų skerspjūvis  $A_1$  projektuojamas iš IPE profiliuotųjų, o kiti strypai projektuojami iš stačiakampių šaltojo formavimo vamzdžių. Vidurinio mazgo įlinkis  $u \leq 6$  cm.

Viršutinė juosta modeliuojama keturiais antros eilės elementais (2 pav., b), o kiti strypai modeliuojami tempiamaisiais ar gniuždomaisiais elementais (2 pav., a).

Projektuojama simetrinė santvara, jos optimizuojami parametrai  $h_1, h_2, a_1, a_2$  bei  $A_1, A_2, \dots, A_5$  parodyti 3 pav. Nustatomos teorinės optimalios šių parametų reikšmės neribojant ir ribojant santvaros aukštį  $h = h_1 + h_2$ .



3 pav. Santvaros skaičiuojamosios schemas:

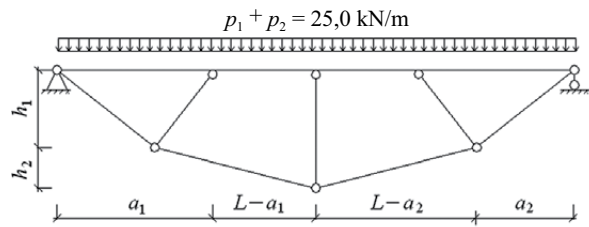
a) pirmojo apkrovų derinio veikiama santvara; b) dviejų derinių veikiama santvara

Fig. 3. Computational schemes for trusses: a) first combination of loads; b) load with two combinations

Pagal anksčiau aprašytą metodiką buvo sudarytos santvaros pusiausvyros ir geometrinės lygtys, stiprumo bei pastovumo sąlygos. Aprašant jas Matlab (Дьяконов 2005) algoritmine kalba sudaryta optimizavimo programa. Netiesinio matematinio programavimo uždavinio (14)–(15) optimaliam sprendiniui nustatyti naudojamas Matlab paprogramis *fmincon*. Sudaromi tikslo funkcijos (14) bei apribojimų (15) reikšmių ir gradientų skaičiavimo paprogramiai, kurie kartu su kitais Matlab kalba aprašytais duomenimis pateikiami paprogramiui *fmincon* per įėjimo parametrus.

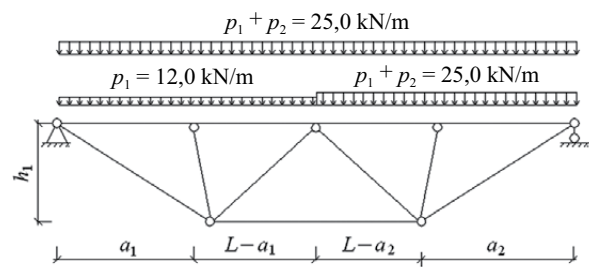
Nagrinėjamos santvaros optimalios skaičiuojamosios schemas parodytos 4 ir 5 pav., o kiti optimizavimo rezultatai pateikti 1 ir 2 lentelėse. Plieno sąnaudų priklausomybė nuo aukščio kiekvienam apkrovų deriniui grafiškai parodyta 7–9 pav.

Optimizavimo rezultatai rodo, kad projektavimo praktikoje dažnai naudojama tilto santvaros skaičiuojamoji schema, parodyta 6 pav., nėra optimali. Mažinant santvaros aukštį (nuo optimalaus), plieno sąnaudos didėja. Be to, mažinant santvaros aukštį plieno poreikis juostoms didėja, o spyriams mažėja.



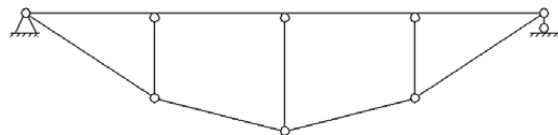
4 pav. Optimali santvaros skaičiuojamoji schema veikiant tik pirmajam apkrovų deriniui

Fig. 4. Optimal computational scheme for a truss with the first combination of loads



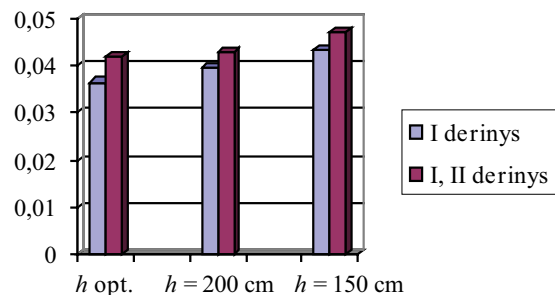
5 pav. Optimali santvaros skaičiuojamoji schema atsižvelgiant į du apkrovų derinius

Fig. 5. Optimal computational scheme for a truss with two combinations of loads

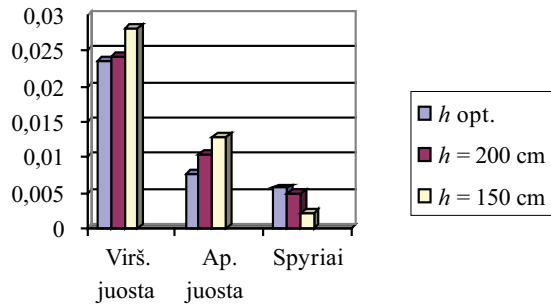


6 pav. Santvaros skaičiuojamoji schema

Fig. 6. Computational scheme for a truss

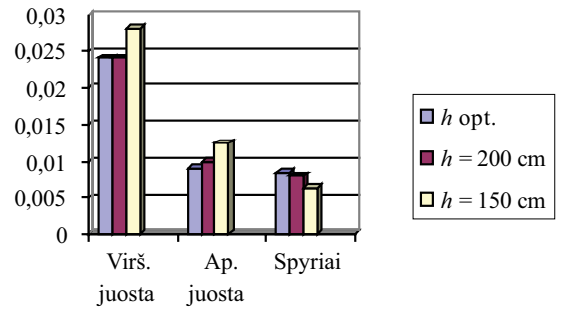


7 pav. Plieno sąnaudų ( $\text{m}^3$ ) palyginimas pagal aukščius  
Fig. 7. Comparison of steel consumption ( $\text{m}^3$ ) according to truss height



8 pav. Plieno sąnaudos ( $m^3$ ) juostoms ir spyriams, veikiant tik pirmajam apkrovų deriniui

Fig. 8. Comparison of steel consumed ( $m^3$ ) by bars and crossbars under the first combination of loads



9 pav. Plieno sąnaudos ( $m^3$ ) juostoms ir spyriams, atsižvelgiant į abu derinius

Fig. 9. Comparison of steel consumed ( $m^3$ ) by bars and crossbars considering both combinations

1 lentelė. Tilto santvaros optimizavimo rezultatai

Table 1. The results of optimizing the bridge truss

Santvaros aukštis (cm)	Apkrovų derinys	$a_1$ (cm)	$a_2$ (cm)	$h_1$ (cm)	$h_2$ (cm)	$h$ (cm)	Tūris $V$ ( $cm^3$ )
neribotas	I	338	229	244	79	323	36465
	I ir II	319	344	237	0	237	41983
$h = 200$	I	345	159	146	54	200	39541
	I ir II	283	328	200	0	200	42916
$h = 150$	I	300	266	117	33	150	43346
	I ir II	296	355	150	0	150	46880

2 lentelė. Strypų optimalių skerspjūvio plotų reikšmės

Table 2. The values of the areas of optimal cross-sections

Santvaros aukštis (cm)	Apkrovų derinys	$A_1$ ( $cm^2$ )	$A_2$ ( $cm^2$ )	$A_3$ ( $cm^2$ )	$A_4$ ( $cm^2$ )	$A_5$ ( $cm^2$ )	$A_6$ ( $cm^2$ )	Tūris $V$ ( $cm^3$ )
neribotas	I	IPEA180 19,58	□60×40×3 5,41	□60×40×3 5,41	□60×60×3 6,61	– 0	□60×60×3 6,61	36465
	I ir II	IPE160 20,09	□70×50×3 6,61	□70×50×3 6,61	□40×40×5 6,36	□70×70×3 7,81	– 0	41983
$h = 200$	I	IPE160 20,09	□70×50×3 6,61	□70×50×4 8,55	□70×70×3 7,81	– 0	□40×40×5 6,36	39541
	I ir II	IPE160 20,09	□60×40×4 6,95	□70×50×4 8,55	□60×60×3 6,61	70×70×3 7,81	– 0	42916
$h = 150$	I	IPEA200 23,47	□80×40×5 10,36	□80×40×5 10,36	□40×40×5 6,36	– 0	□40×40×3 4,21	43346
	I ir II	IPEA200 23,47	□70×50×4 8,55	□70×50×6 12,03	50×50×3 5,41	70×70×3 7,81	– 0	46880

## Išvados

1. Tamprųjų santvarų optimizavimo uždaviniai formuluojami ir sprendžiami kaip netiesiniai diskrečiojo matematinio programavimo uždaviniai, naudojant pusiausviroseis baigtinius elementus. Kadangi kai kurie santvaros matmenys nežinomi, tai uždavinio tikslo funkcija, pusiausvyros ir geometrinės lygtys, taip pat stiprumo bei pastovumo sąlygos yra netiesinės.
2. Skaičiuojamaisiais tyrimais parodyta, kad sudarytas optimizavimo uždavinio matematinis modelis leidžia nustatyti ne tik optimalius santvaros strypų skerspjūvius, bet ir optimalų jos aukštį bei optimalią tinklelio struktūrą, veikiant keliems apkrovų deriniams bei atsižvelgiant į metalinių konstrukcijų projektavimo reglamento reikalavimus.

3. Tyrimais parodyta, kad projektavimo praktikoje dažnai naudojama tilto santvaros skaičiuojamoji schema nėra optimali.
4. Mažinant santvaros aukštį (lyginant su optimaliu) bendros plieno sąnaudos didėja, be to, plieno poreikis juostoms didėja, o spyriams mažėja.

## Literatūra

- Feng, F. Z.; Kim, Y. H.; Yang, B. S. 2006. Application of hybrid optimization techniques for model updating of rotor shafts, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 32(1): 67–75. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-006-0003-4>
- Goremikins, V.; Serdjuks, D. 2010. Rational structure of trussed beam, in *Modern building materials, structures and techniques*. Vilnius: Technika, 513–518.
- Gutkowski, W. (Ed.). 1997. *Discrete structural optimization*. Springer-Verlag. 250 p.
- Hayalioglu, M. S.; Degertekin, S. O. 2004. Design of non-linear steel frames for stress and displacement constraints with semirigid connections via genetic optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27: 259–271. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-003-0357-9>
- Hayalioglu, M. S. 2000. Optimum design of geometrically non-linear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm, *Computers & Structures* 77: 527–538. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00221-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00221-7)
- Haug, I. J.; Arora, J. S. 1980. *Applied optimal design. Mechanical and structural systems*. New York: John Wiley & Sons.
- Yuge, K.; Iwai, N.; Kikuchi, N. 1999. Optimization of 2D structures subjected to non-linear deformations using the homogenization method, *Structural Optimization* 17: 286–299. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01207005>
- Kalanta, S. 1995. The equilibrium finite element in computation of elastic structures, *Statyba [Civil Engineering]* 1(1): 25–47 (in Russian).
- Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 480 p. ISBN 978-9955-28-160-3.
- Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskuskas, A. 2009. Discrete optimization problems of the steel bar structures, *Engineering Structures* 31(6): 1298–1304. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.01.004>
- Karkauskas, R. 2007. Optimization of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse, *Journal of Civil Engineering and Management* 13(3): 183–192.
- Maciulevičius, D. 1964. Tiesinio programavimo algoritmai strypinių statiskai sprendžiamų minimalaus svorio konstrukcijų sintezei, *Stybinė mechanika ir konstrukcijos*, 33–49 (in Russian).
- Maciulevičius, D. 1966. Iškiliojo programavimo algoritmas minimalaus svorio tamprios šarnyrinės-strypinės konstrukcijos sintezei daugelio apkrovų atveju, *Stybinė mechanika*, 79–85 (in Russian).
- Majid, K. I. 1974. *Optimum of design structures*. New York: Wiley.
- Manickarajah, D.; Xie, Y. M.; Steven, G. P. 2000. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method, *Computers & Structures* 74: 731–741. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00083-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00083-8)
- Rao, S. S. 1996. *Engineering optimization. Theory and practice*. Third edition. New York: John Wiley & Sons. 920 p. ISBN 0-471-55034-5.
- STR 2.05.08:2005. *Plieninių konstrukcijų projektavimas. Pagrindinės nuostatos*. 2005. Vilnius. 128 p.
- Ulitinas, T.; Kalanta, S. 2010. Santvarų aukščio optimizavimas, *Mokslas – Lietuvos ateitis* 2(6): 56–60.
- Zheng, Q. Z.; Querin, O. M.; Barton, D. C. 2006. Geometry and sizing optimisation of discrete structure using the genetic programming method, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 31(6): 452–461. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-005-0561-x>
- Дьяконов, В. П. 2005. *MATLAB 6.5 SP1.7.0. Simulink 5/6 в математике и моделировании*. Москва: Солон-Пресс. 576 с. ISBN 5-98003-209-6.

## OPTIMIZATION OF ELASTIC BRIDGE TRUSSES

I. Rimkus, Š. Kisevičius, S. Kalanta

### Abstract

The article analyzes the problems of optimizing elastic bridge trusses, which is a tool for seeking the establishment of the minimum volume (mass) of construction and optimization of the cross-section area and height as well as the structure of the truss. It has been formulated as a nonlinear discrete mathematical programming problem. The upper band of the truss works not only for compression but also for bending. The cross-sections of the elements are designed from rolled steel sections. Mathematical models are prepared by using the finite element method and complying with requirements for the strength, stiffness and stability of the structure. The formulated problems are solved referring to an iterative process and applying the mathematical software package “MATLAB” along with routine “fmincon”. The ratio of buckling is corrected in every case of iteration. Requirements for cross-section assortment (discretion) are fulfilled employing the branch and bound method.

**Keywords:** elastic steel truss, finite elements, nonlinear optimization problem.