

STIFFNESS CHARACTERISTICS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR BEAM FINITE ELEMENT

A. Mikoliūnas & R. Kačianauskas

To cite this article: A. Mikoliūnas & R. Kačianauskas (1997) STIFFNESS CHARACTERISTICS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR BEAM FINITE ELEMENT, *Statyba*, 3:10, 52-59, DOI: [10.1080/13921525.1997.10531684](https://doi.org/10.1080/13921525.1997.10531684)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1997.10531684>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 95

GEOMETRIŠKAI NETIESINIO LENKIAMO STRYPO BAIGTINIO ELEMENTO STANDUMO RODIKLIŲ NUSTATYMAS

A. Mikoliūnas, R. Kačianauskas

1. Įvadas

Šiuolaikinė kompiuterinė technika bei egzistuojančios skaičiavimo technologijos leidžia tiesiniuose uždaviniuose atsisakyti įprastų prielaidų bei hipotezių. Atsisakius prielaidų apie mažus poslinkius ir deformacijas formuluojamas geometriškai netiesinis uždavinys. Toks uždavinys leidžia prognozuoti geometrinių pokyčių įtaką ir yra aktualus nagrinėjant atskirus strypus ir strypines sistemas.

Viena iš pirmųjų publikacijų apie netiesinius baigtinius elementus paskelbta 1960 metais [1]. Bendrieji geometriškai netiesinių kontinualių ir diskrečių sistemų matematiniai modeliai ir pagrindinės priklausomybės pateiktos [2-8].

Sudarant geometriškai netiesinių lenkiamų strypų modelius dominuoja strypai, aprašyti 2 mazgais [2-8], kur ašinė jėga aproksimuojama tiesine išraiška. Sudėtingesnė išraiška pasiūlyta [3], kur tikslesniam ašinės jėgos skaičiavimui strypo elemente naudojamas trečias mazgas.

Straipsnyje sudarytos konkrečios elemento su 3 mazgais priklausomybės ir analizinės plokščio lenkiamo strypo elemento tamprumo rodiklių išraiškos. Gautas elementas yra išbandytas autorių sudarytoje baigtinių elementų metodo programoje, skirtoje netiesiniams skaičiavimams.

2. Geometriškai netiesinio uždavinio formulavimas baigtiniam elementui

Visos sistemos modelis yra surenkamas iš atskirų elementų naudojant standartinius algoritmus, o geometriškai netiesinių baigtinių elementų sistemų analizės uždavinys yra formuluojamas tik atskiram baigtiniam elementui e . Straipsnyje pagrindinės elemento e priklausomybės sudarytos virtualių poslinkių metodu. Šis metodas mechanikoje naudojamas seniai

ir jį galima laikyti baigtinių elementų metodo inžineriniu variantu. Jam naudojama paprasta mažų (virtualių) poslinkių procedūra. Išorinių bei vidinių jėgų darbų lygybė yra teorinis metodo pagrindas. Darbų lygybė išreiškiama per būvio kintamuosius, priskirtus pradinei (nedeformuotai) elemento konfigūracijai, todėl nagrinėjamas būdas atitinka kontinuumo mechanikoje sutinkamą Lagranžo formuluotę. Pagrindinės virtualių poslinkių metodo priklausomybės gaunamos sulyginant išorinių jėgų darbą W_e , atliktą suteikiant mazgams virtualų poslinkį su vidine deformacijos energija E_e . Elemento e lygyje virtualių poslinkių principas išreiškiamas lygybe:

$$\delta E_e = \delta W_e. \quad (1)$$

Čia simbolis δ žymi virtualų poslinkį. Pažymėjus apibendrintus elemento kintamuosius vektoriais - apibendrintas deformacijas $\Theta_e(x)$ ir apibendrintas įtempimus $Q_e(x)$, o mazgų poslinkius U_e ir jėgas F_e , - lygybės (1) nariai užrašomi taip:

$$W_e = U_e^T F_e, \quad (2)$$

$$E_e = \int_{V_e} \Theta_e^T(x) Q_e(x) dV. \quad (3)$$

Šiose išraiškose V_e - elemento tūris.

Kadangi aproksimuojame plokščią sijos elementą, apibendrinti kintamieji yra vieno kintamojo x funkcijos.

Kaip įprasta baigtinių elementų metode, geometriškai netiesinis uždavinys formuluojamas analogiškai tiesiniam uždaviniui. Naudojant poslinkių formuluotę, poslinkių funkcijos pasirenkamos vieno baigtinio elemento ribose. Baigtiniame elemente e poslinkiai $U_e(x)$ aproksimuojami išreikškus juos mazginių poslinkių vektoriumi U_e :

$$U_e(x) \approx [N_e(\xi)]U_e, \quad (4)$$

kur $[N_e(\xi)]$ - poslinkių aproksimacijos matrica, o ξ - vietinė koordinatė.

Apibendrintos deformacijos skaičiuojamos įvedant poslinkių aproksimaciją (4) į netiesines geometrinės lygtis. Galutinė jų išraiška tokia:

$$\Theta_e(\xi) = [B_e([N_e(\xi)]U_e)]U_e. \quad (5)$$

Čia deformacijų aproksimacijos matrica (dar vadinama geometrine matrica) $[B_e]$ sudaryta iš tiesinių ir netiesinių ($[B_0]$ ir $[B_N]$) narių:

$$[B_e([N_e(\xi)]U_e)] = [B_{0e}(\xi)] + [B_{Ne}([N_e(\xi)]U_e)]. \quad (6)$$

Panaudojus anksčiau gautas priklausomybes (4-6), deformacijos energijos (3) variacija išreiškiama taip:

$$\delta(E_e) = \delta(U_e^T) \int_{V_e} \frac{\partial}{\partial U_e} \left([B_e^T([N_e(\xi)]U_e)] Q_e(\xi) \right) dV + \delta(U_e^T) \int_{V_e} [B_e^T([N_e(\xi)]U_e)] \frac{\partial}{\partial U_e} (Q_e(\xi)) dV. \quad (7)$$

Įrašius (7) į lygybę (1), virtualių darbų lygybę galima užrašyti netiesinėmis algebrinėmis lygtimis:

$$[K_e(U_e)]U_e = F_e. \quad (8)$$

Netiesinė standumo matrica apibendrinama kaip 3 matricų suma:

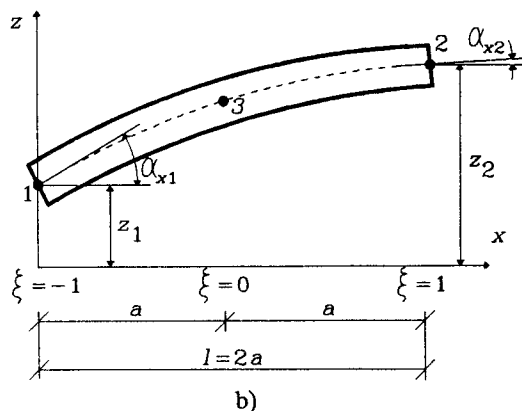
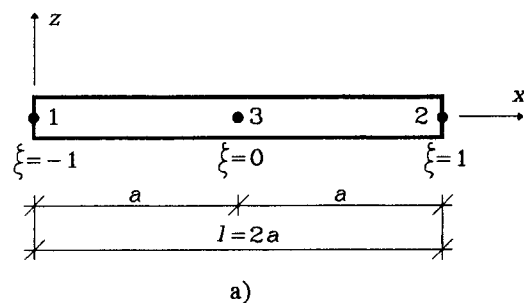
$$[K_e(U_e)] = [K_{0e}] + [K_{Ne}(U_e)] + [K_{Ge}(U_e)]. \quad (9)$$

Pirmoji matrica $[K_{0e}]$ yra mažų poslinkių (tiesinė) matrica, nepriklausanti nuo deformuoto būvio geometrijos. Antroji matrica $[K_{Ne}]$ yra didelių poslinkių matrica. Trečioji matrica $[K_{Ge}]$ yra geometrinė standumo matrica. Ji atspindi antrąjį lygybės (7) narį. Tikslios geometriškai netiesinių matricų išraiškos labai priklauso nuo daromų prielaidų ir konkrečių elementų.

3. Strypo elemento pagrindinės priklausomybės

Panagrinėkime dvimatį strypo baigtinį elementą, vaizduojamą 1 pav. Šis baigtinis elementas turi 3 mazgus. Pradinėje konfigūracijoje strypas gali būti tiesus (1a pav.), arba kreivas (1b pav.).

Strypo pradinė konfigūracija aprašoma galinių mazgų padėties linijinių ir kampinių koordinatėmis vektoriumi $z = \{z_1, \alpha_{x1}, z_2, \alpha_{x2}\}^T$ (1b pav.). Kadangi



1 pav. Plokščias sijinis elementas pradinėje konfigūracijoje: a) tiesus, b) kreivas

Fig 1. Plane beam element in initial configuration: a) straight, b) curved

pradinė konfigūracija yra susitarimo dalykas, tai bendruoju atveju ji nusakoma vektoriumi z . Jeigu pradinėje konfigūracijoje elementas yra tiesus, tai vektorius $z=0$. Elemento fizikinės savybės aprašomos dydžiais EA (tempiamo strypo standis) ir EI (lenkiamo strypo standis), kur E - tamprumo modulis, A - skerspjūvio plotas, I - skerspjūvio inercijos momentas.

Baigtinis elementas turi 7 laisvės laisvius: po 3 (2 linijiniai ir vienas kampinis) elemento galuose ir 1 elemento viduryje (linijinis). Būtent vidurinis mazgas leidžia atsisakyti prielaidos, kad ašinė jėga per visą strypo ilgį nekinta.

Mazgų poslinkių vektorius U_e šiam elementui išskaidomas į dvi dalis: $U_e = \{u, w'\}^T$, čia vektorius $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ aprašo horizontalius poslinkius. Poslinkis u_3 aprašo vidurinio strypo mazgo poslinkį, kurio priklausomybė nuo galinių mazgų poslinkių nėra tiesinė. Tiksliau kalbant, u_3 yra nuokrypa nuo tiesinio dėsnio. Strypo geometrija aprašoma vektoriumi $w' = z + w$, čia $w = \{w_1, \Theta_{x1}, w_2, \Theta_{x2}\}^T$ yra vertikalių

poslinkių vektorius. Šiose išraiškose w_i yra mazgų linijiniai poslinkiai, Θ_x - posūkiai.

Strypo normalinius įtempimus σ_x atstoja dvi įrašos - lenkimo momentas M ir ašinė jėga N . Bet kuriame sijos taške, nutolusiame nuo vidurio plokštumos atstumu z , lenkimo momentas ir ašinė jėga išreiškiami taip:

$$N = \int \sigma_x dz_l, \quad M = \int \sigma_x z_l dz_l. \quad (10)$$

Tiesiam elementui išilginės deformacijos x kryptimi išraiška atrodo taip:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2. \quad (11)$$

Po deformacijos plokščias pjūvis lieka plokščias. Taško, nutolusio nuo vidurio plokštumos atstumu z , poslinkis u kryptimi x išreiškiamas taip:

$$u = \bar{u} - z_l \frac{dw}{dx}, \quad (12)$$

čia \bar{u} - sijos ašies poslinkis.

Įrašius (12) į (11), deformacija yra išreiškiamą apibendrintomis deformacijomis:

$$\varepsilon_x = \Delta + z_l \kappa, \quad (13)$$

čia Δ yra strypo ašies išilginė deformacija:

$$\Delta = \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad (14)$$

o dydis κ - strypo kreivis:

$$\kappa = - \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (15)$$

Kreivo elemento skiriasi tik išilginės deformacijos Δ išraiška:

$$\Delta_x = \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d(z+w)}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Pasinaudojus gautomis išraiškomis, galima sudaryti virtualių darbų lygybę (1), kurioje apibendrinti vektoriai $\Theta_e(x) = \{\Delta_x, \kappa\}^T$ ir $Q_e(x) = \{N, M\}^T$. Apibendrintos deformacijos Δ ir κ išreiškiamos poslinkiais pagal (4). Patogumo dėlei vertikalūs ir horizontalūs poslinkiai atskiriami:

$$u(\xi) = [N_{e1}(\xi)]u, \quad w(\xi) = [N_{e2}(\xi)]w. \quad (17)$$

Čia:

$$[N_{e1}(\xi)] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi & 2(1 - \xi^2) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$[N_{e2}(\xi)] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 - 6\xi + 2\xi^3 \\ l(\xi^2 - 1)(\xi - 1) \\ 4 + 6\xi - 2\xi^2 \\ l(\xi^2 - 1)(\xi + 1) \end{bmatrix}^T. \quad (19)$$

Pirmieji du aproksimacijos matricos (18) nariai yra Lagranžo polinomialai, trečiasis - antrojo laipsnio mišrus polinomas, aprašantis vidurinio mazgo poslinkį. Antroji matrica (19) sudaryta iš Ermito polinomų.

Išraiškos (17) išvestinės pateikiamos analogiškai:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = [b_u]u, \quad (20)$$

$$\frac{dw}{dx} = [b_w]w, \quad (21)$$

kur:

$$[b_u] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4\xi \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$[b_w] = \frac{1}{4l} \begin{bmatrix} 6(\xi^2 - 1) \\ l(3\xi^2 - 2\xi - 1) \\ 6(1 - \xi^2) \\ l(3\xi^2 + 2\xi - 1) \end{bmatrix}^T. \quad (23)$$

Analogiškai kaip poslinkiai aproksimuojamas ir vektorius z bei jo išvestinė:

$$z(\xi) = [N_{e2}(\xi)]z, \quad (24)$$

$$\frac{dz}{dx} = [b_w]z. \quad (25)$$

Strypo kreivis (15) taip pat išreiškiamas mazgų poslinkiais:

$$\kappa = [c]w, \quad (26)$$

$$[c] = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 6\xi & l(3\xi - 1) & -6\xi & l(3\xi + 1) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Įrašius (20, 21, 26) į (16), (15, 16) į (13) gaunama:

$$\varepsilon_x = [b_u]u + \frac{1}{2} ([b_w]w)^2 - \frac{1}{2} ([b_w]z)^2. \quad (28)$$

Kadangi elementas dirba tamprioje stadijoje, išraiškas (10) galima perrašyti taip:

$$N = EA\varepsilon_x, \quad M = EI\kappa. \quad (29)$$

Galutinė standumo matricos (9) išraiška pateikta blokinių matricų pavidalu:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uw}] \\ [K_{uw}]^T & [K_{ww}] \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Blokinių matricių išraiškos yra tokios:

$$[K_{uu}] = \int_l [b_u]^T \frac{\partial N}{\partial u} dx, \quad (31)$$

$$[K_{uw}] = \int_l [b_u]^T \frac{\partial N}{\partial w} dx, \quad (32)$$

$$[K_{ww}] = \int_l \left([c]^T \frac{\partial M}{\partial w} + [b_w]^T ([b_w]w) \frac{\partial N}{\partial w} + N [b_w]^T [b_w] \right) dx. \quad (33)$$

Sutvarkius išraiškas (31-33) galutinės standumo matricos pateikiamos tokiu pavidalu:

$$[K_{uu}] = EA \int_l [b_u]^T [b_u] dx, \quad (34)$$

$$[K_{uw}] = EA \int_l ([b_w]w) [b_u]^T [b_w] dx, \quad (35)$$

$$[K_{ww}] = EI \int_l [c]^T [c] dx + EA \int_l ([b_w]w)^2 [b_w]^T [b_w] dx + \int_l N [b_w]^T [b_w] dx. \quad (36)$$

Suintegravus tiesinė standumo matrica atrodo taip:

$$[K_{uu}] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Joje galima išskirti 2 dalis. Pirmasis blokas (2x2) yra ne kas kita, kaip įprasto šarnyrinio-strypinio baigtinio elemento standumo matrica. Matricos elementas K_{uu33} atsiranda dėl elemento vidurinio mazgo įtakos.

Analogiški veiksmai atliekami su matrica (35):

$$[K_{uw}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Šios matricos elementai apskaičiuoti taikant kompiuterinę algebrą. Žemiau pateikiama vieno iš matricos elementų išraiška (algoritmine kalba FORTRAN):

$$AKUW(1,1) = \text{elea} * (-(\text{al} * \text{ax1}) - \text{al} * \text{ax2} - \text{al} * \text{tx1} - \text{al} * \text{tx2} - 12 * \text{w1} + 12 * \text{w2} - 12 * \text{z1} + 12 * \text{z2}) / (10 * \text{al} ** 2),$$

čia: "elea" - EA, "al" - l, "ax1" - α_{x1} , "ax2" - α_{x2} , "z1" - z_1 , "z2" - z_2 , "tx1" - Θ_{x1} , "tx2" - Θ_{x2} , "w1" - w_1 , "w2" - w_2 .

Matrica (36) susideda iš trijų dalių. Pirmasis integralas:

$$EI \int_l [c]^T [c] dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Tai yra lenkiamo strypo standumo matrica. Antrasis išraiškos (36) integralas:

$$EA \int_l ([b_w]w)^2 [b_w]^T [b_w] dx = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Šios matricos elementai apskaičiuoti taikant kompiuterinę algebrą. Matrica yra simetrinė. Vieno iš elementų išraiška:

$$AKWW2(1,1) = 3 * \text{elea} * (\text{al} ** 2 * \text{ax1} ** 2 + \text{al} ** 2 * \text{ax2} ** 2 + 2 * \text{al} ** 2 * \text{ax1} * \text{tx1} + \text{al} ** 2 * \text{tx1} ** 2 + 2 * \text{al} ** 2 * \text{ax2} * \text{tx2} + \text{al} ** 2 * \text{tx2} ** 2 + 6 * \text{al} * \text{ax1} * \text{w1} + 6 * \text{al} * \text{ax2} * \text{w1} + 6 * \text{al} * \text{tx1} * \text{w1} + 6 * \text{al} * \text{tx2} * \text{w1} + 24 * \text{w1} ** 2 - 6 * \text{al} * \text{ax1} * \text{w2} - 6 * \text{al} * \text{ax2} * \text{w2} - 6 * \text{al} * \text{tx1} * \text{w2} - 6 * \text{al} * \text{tx2} * \text{w2} - 8 * \text{w1} * \text{w2} + 24 * \text{w2} ** 2 + 6 * \text{al} * \text{ax1} * \text{z1} + 6 * \text{al} * \text{ax2} * \text{z1} + 6 * \text{al} * \text{tx1} * \text{z1} + 6 * \text{al} * \text{tx2} * \text{z1} + 48 * \text{w1} * \text{z1} - 48 * \text{w2} * \text{z1} + 24 * \text{z1} ** 2 - 6 * \text{al} * \text{ax1} * \text{z2} - 6 * \text{al} * \text{ax2} * \text{z2} - 6 * \text{al} * \text{tx1} * \text{z2} - 6 * \text{al} * \text{tx2} * \text{z2} - 48 * \text{w1} * \text{z2} + 48 * \text{w2} * \text{z2} - 8 * \text{z1} * \text{z2} + 24 * \text{z2} ** 2) / (35 * \text{D0} * \text{al} ** 3).$$

Jeigu laikoma, kad ašinė jėga per visą strypo ilgį nekinta, trečiasis integralas lygus:

$$\int_l N [b_w]^T [b_w] dx = Nl \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & \frac{1}{15} & -\frac{6}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{10} & -\frac{1}{15} & \frac{6}{10} & -\frac{l}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Kadangi ašinė jėga per visą elemento ilgį nėra pastovi (skaičiuojama pagal formules (28,29)), geometrinės standumo matricos išraiškos tampa labai sudėtingos. Vieno matricos elemento išraiška, gauta taikant kompiuterinę algebrą, atrodo taip (tiesiam elementui):

$$AKWW3(1,1)=3*elea*(2*al**2*ax1*tx1+al**2*tx1**2+2*al**2*ax2*tx2+al**2*tx2**2-28*al*u1+28*al*u2+6*al*ax1*w1+6*al*ax2*w1+6*al*tx1*w1+6*al*tx2*w1+24*w1**2-6*al*ax1*w2-6*al*ax2*w2-6*al*tx1*w2-6*al*tx2*w2-48*w1*w2+24*w2**2+6*al*tx1*z1+6*al*tx2*z1+48*w1*z1-48*w2*z1-6*al*tx1*z2-6*al*tx2*z2-48*w1*z2+48*w2*z2)/(70*al**3).$$

4. Netiesinio uždavinio sprendimo algoritmas

Geometriškai netiesinės baigtinių elementų sistemos analizės uždavinys yra aprašomas netiesinėmis algebrinėmis lygtimis:

$$[K(U)]U=F. \quad (42)$$

Čia sistemos matrica $[K(U)]$ ir apkrovos vektorius F sudaromi standartiniu būdu, surenkant atskirų elementų matricas (30) ir vektorius.

Modelis (42) neatspindi reiškinio fizikos. Įprasta netiesinio deformavimo reiškinį nagrinėti kaip per laiką t vykstantį procesą, kur išorinės apkrovos F ir poslinkiai U yra laiko funkcijos $F=F(t)$ ir $U=U(t)$. Aprašant tokį procesą laikas dalijamas į intervalus Δt . Apkrova laiko momentu $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ pridedama porcijomis:

$$(t_{i+1})=F(t_i)+\Delta F(\Delta t). \quad (43)$$

Analogišku būdu išreiškiami ir poslinkiai:

$$(t_{i+1})=U(t_i)+\Delta U(\Delta t). \quad (44)$$

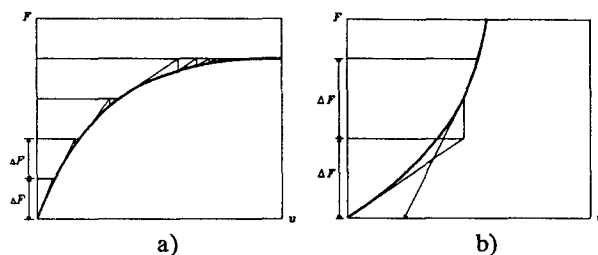
Netiesinis modelis (42) yra išreiškiamas prieaugiais:

$$[K_T(t_i)]\Delta U(\Delta t) = \Delta F(\Delta t) + \gamma(t_i), \quad (45)$$

čia $[K_T(t_i)]$ yra tangentinė standumo matrica, o $\gamma(t_i) = F(t_i) - Q(t_i)$ yra nesąryšio tarp išorinės apkrovos ir vidinių jėgų vektorius. Nesąryšio vektorius γ atspindi būvio kintamųjų neatitikimą lygties (42) sprendiniui. Iteracinių skaičiavimų eigoje $\gamma \rightarrow 0$.

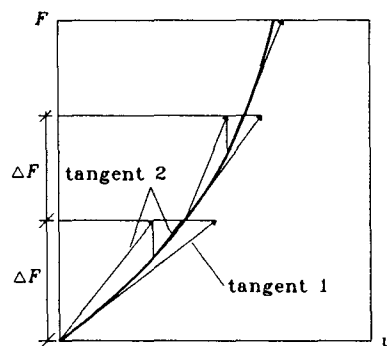
Šiuo metu pasaulyje egzistuoja daug įvairaus sudėtingumo netiesinių uždavinių sprendimo algoritmų [2-4, 9, 10]. Paprasčiausias iš jų yra Oilerio metodas,

kuris apsiriboja deformavimo proceso nagrinėjimu atskiruose žingsniuose, neatliekant iteracinių skaičiavimų. Dauguma standartinių tapusių metodų naudoja įvairias Niutono tipo algoritmų atmainas. Šie algoritmai yra iteraciniai algoritmai, kur kiekviename laiko žingsnyje atliekamas lygties parametrų (pavyzžiui, vektoriaus γ) koregavimas. Efektyvesni algoritmai naudoja įvairias atskirų procedūrų kombinacijas. Klasikiniai Niutono tipo algoritmai pritaikyti netiesiniams procesams su didėjančio deformatyvumo kreive modeliuoti (pav. 2a). Pav. 2a pavaizduotas žingsninis - iteracinis algoritmas, kur kiekviename žingsnyje naudojamas modifikuotas Niutono-Rafsono metodas. Tuo tarpu esant geometriniam netiesiškumui deformavimo procesas vyksta pagal standėjimo kreivę (pav. 2b), ir tradiciniai Niutono algoritmai nekonverguoja.



Pav. 2. Netiesinio deformavimosi kreivės: a) didėjančio deformatyvumo, b) standėjimo

Fig 2. Non-linear deformation curves: a) "softening", b) "locking"



Pav. 3. Siūlomo algoritmo iliustracija

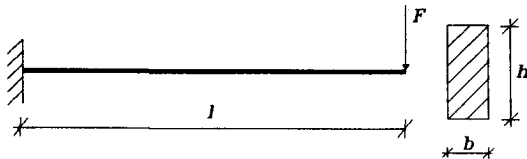
Fig 3. Illustration of proposed algorithm

Straipsnyje buvo sudarytas ir realizuotas kombinuotas algoritmas netiesiniams procesams tiek su standėjimo, tiek su didėjančio deformatyvumo kreivėmis modeliuoti. Algoritmo iliustracija pateikta 3 pav. Naudojant šį algoritmą kiekviename apkrovimo

žingsnyje liestinė standumo matrica skaičiuojama du kartus. Pirmoji matrica atitinka liestinę apkrovos žingsnio pradžioje (tangent 1), o antroji matrica - žingsnio pabaigoje (tangent 2). Atlikus du bandomuosius skaičiavimus nustatomas kreivės pobūdis, nuo kurio ir priklauso, kuri iš liestinių standumo matricų naudojama modifikuotose Niutono-Rafsono iteracijose. Algoritmas programiškai realizuotas autorių sukurtoje programoje. Standėjimo kreivei pasirenkama antroji standumo matrica. Jei kreivė didėjančio deformatyvumo, pasirenkama pirmoji standumo matrica. Dėl papildomų standumo matricos perskaičiavimų ir būtinumo saugoti dvi sistemos standumo matricas toks metodas reikalauja daugiau laiko sąnaudų bei kompiuterio atminties, tačiau aprašo procesus, kurie nepriklauso nuo kreivės pobūdžio.

5. Skaitiniai rezultatai

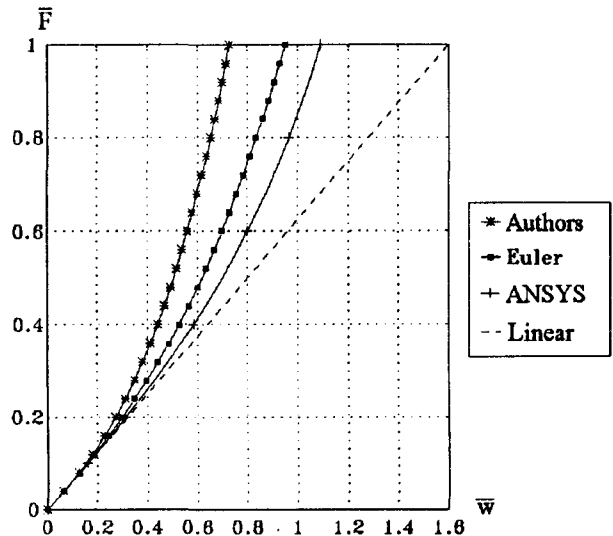
Anksčiau aptartas elementas (jo standumo rodikliai) bei sprendimo algoritmai buvo patikrinti sprendžiant plokščią pastovaus stačiakampio skerspjūvio gembinę siją (4 pav.).



Pav. 4. Sijos skaičiuojamoji schema
Fig 4. Computational scheme of beam

Sijos ilgis yra l , jos skerspjūvis apibūdinamas dydžiais b ir h , o medžiaga - tamprumo moduliui E . Sijos laisvasis galas apkrautas koncentruota jėga F . Skaičiavimo rezultatai išreiškiami bedimensiniais dydžiais \bar{F} ir \bar{w} . Čia $\bar{F} = F / F_{\max}$, $F_{\max} = 10^5$ N, $\bar{w} = \frac{wEA}{lF_{\max}} \cdot 10^3$. Skaitiniam pavyzdžiui buvo panaudoti tokie sijos rodikliai: $l=2.0$ m, $F_{\max} = 10^5$ N, $EA = 2.0 \cdot 10^8$ N, $EI = 166.6$ Nm². Skaičiavimo rezultatai (deformavimosi kreivė $\bar{F} - \bar{w}$) pateikti 5 pav. Kreivė, gauta naudojant pasiūlytą algoritmą, buvo palyginta su kitais metodais. Oilerio metodas realizuotas kaip pasiūlyto algoritmo konkretus

atvejis. Kartu pateikiamas ir tiesinis sprendinys. Tas pats uždavinys buvo spęstas ir naudojant paketą ANSYS 5.2, kur naudojami sijų elementai aprašyti tik 2 mazgais. Kaip matyti iš rezultatų, pasiūlytas elementas su trečiuoju mazgu yra tikslesnis. Jis geriau modeliuoja procesus su didėjančiu standumu.



Pav. 5. Skaitinių rezultatų palyginimas
Fig 5. Comparison of numerical results

6. Išvados

Straipsnyje nagrinėjamas geometriškai netiesinis plokščias lenkiamo strypo baigtinis elementas. Įvedus trečią mazgą tiksliau aprašomas netiesinis ašinės jėgos pasiskirstymas elemente. Šio elemento standumo rodikliai išreiškiami pakankamai sudėtingomis analizinėmis išraiškomis, kurios randamos taikant kompiuterinę algebrą. Elementas panaudotas procesams su standėjimo kreive aprašyti ir realizuotas baigtinių elementų metodo programoje. Skaičiavimo rezultatai patvirtino suformuluotų prielaidų teisingumą.

Literatūra

1. M.J.Turner, E.H.Dill, H.C.Martin & R.J.Melosh. Large deflection of structures subject to heating and external load // J. Aero. Sci., 1960, p. 27, 97-106.
2. R.Kačianauskas. Computer Methods in Multilevel Modelling of Beams and Shells. Vilnius: Technika, 1995. 395 p.
3. M.A.Crisfield. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, vol. 1, Essentials. Chichester: John Wiley&Sons, 1991. 350 p.

5. K.J.Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, New-Jersey: Prentice-Hall, 1982. 406 p.
6. O.C.Zienkewicz. The Finite Element Method, 3d ed. New-York: McGraw-Hill, 1977. 787 p.
7. Y.B.Yang, W.McGuire. Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis // Journal of Structural Engineering, vol. 112, No. 4, 1986, p. 853-877.
8. A.Conci. Stiffness Matrix for Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames // Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, No. 9, 1992, p. 1859-1875.
9. R.Baušys. A Study of Solution Strategies for Nonlinear Structural Problems // Lithuanian Journal of Computational Mechanics, vol. 33. Vilnius: Technika, 1994, p. 35-45.
10. J.Argyris, H.Balmer and I.St.Doltsinis. Implantation of a nonlinear capability on a linear software system // Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 65, No. 3, 1987, p. 267-291.

Įteikta 1997 03 13

STIFFNESS CHARACTERISTICS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR BEAM FINITE ELEMENT

A.Mikoliūnas, R.Kačlanauskas

Summary

Two-dimensional geometrically non-linear beam element is considered in this paper. The explicit expressions of stiffness characteristics of element with three nodes are derived and tested.

Among models of the geometrically non-linear beams, the elements with 2 nodes dominate [1-8]. Such elements produce constant axial force. The idea of more complex elements with three nodes was suggested in [3]. In this paper geometrically non-linear flat bending beam element with 3 nodes for evaluating of axial force is investigated and non-linear stiffness characteristics are derived.

Basic relations of element e are derived using virtual displacement method. On the level of element e , the principle of virtual displacements is expressed by equalities (1-3). Using displacement approach, displacement functions are prescribed in the bounds of one finite element. Generalised deformations are obtained by introducing displacements approximation (4) and inserting them into non-linear geometric equations (5-6). Variation of deformation energy (3) is expressed in (7). Putting equality (7) into (1), it is possible to write equality of virtual works in terms of non-linear algebraic equations (8). Non-linear stiffness matrix is presented as the sum of 3 matrices (9). The first matrix $[K_{0e}]$ (linear matrix) is the matrix of small deflections, which is independent on deformed shape. The second matrix $[K_{Ne}]$ is the matrix of large deflections. The third matrix $[K_{Ge}]$ is a geometrical stiffness matrix. It reflects the second member of equality (7). Expressions of geometrically non-linear stiffness matrices are greatly dependent on the introduced assumptions and appropriate elements.

Shallow beam finite element is shown in Fig 1. This finite element has 3 nodes. In the initial configuration a beam can be straight (Fig 1a), or curved (Fig 1b). The initial configuration of a beam is described by a vector $z = \{z_1, \alpha_{x1}, z_2, \alpha_{x2}\}^T$ of a beam final nodal co-ordinates, where z_i means nodes co-ordinates, α_{xi} - initial rotations (Fig 1b). However, the initial configuration is a relative statement, and is generally described by vector z . If in initial configuration the element is straight, vector $z=0$. Physical properties of the element are denoted with capital EA (tensional rigidity) and EI (flexural rigidity). The finite element has 7 degrees of freedom: 3 of them are defined at each end of the element (2 linear and 1 rotation) and 1 in the middle of the element. Vector U_e of nodal deflections for this element is split into two parts: $U_e = \{u, w\}^T$, $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$, $w' = z + w$, $w = \{w_1, \Theta_{x1}, w_2, \Theta_{x2}\}^T$. Deflection u_3 shows the deflection of the middle beam node, which is not proportional to the final nodal deflections. To be more strict, u_3 is straightened by linear law. So the linear element in the direction of longitudinal deformation expression is (11). The deflection of a point which is moved from the centre of plane surface in distance z_i , deflection u (in direction x) is expressed in (12). Deformation is expressed by summarised deformations (13). So the deformed element only longitudinal deformation Δ is assigned, which is shown in (16). Evaluating earlier received expressions, it is possible to make equality of virtual work (1), where generalised vectors $\Theta_e(x) = \{\Delta, \kappa\}^T$ and $Q_e(x) = \{N, M\}^T$. Generalised deformations Δ and κ expressed by deflections approximating expressions (4). For convenience, vertical and horizontal deflections are separated (17). By analogy with deflections, vector z and its derivatives are approximated by (24-25). Beam's curvature (15) is also expressed by nodal deflections: (26-27). Putting (20, 21, 26) into (16) and (15, 16) into (13) and expression (28) is got. Evaluating that the element work in elastic stage, expression (10) can be rewritten (29). The final stiffness matrix expression (9) is given in the form of block matrices (30). Expressions of block matrices are presented by (31-33). Having completed operations in expressions (31-33), final stiffness matrix is (34-36). After integrating, linear matrix is (37). Analogous operations are performed with matrices (35)-(38). Elements of this matrix are calculated using computer algebra. Matrix (36) consists of three parts. The first integral (39) is stiffness matrix of bending beam. If we assume that axial force in beam's length is invariable, the third integral is equal to (41). Assuming that axial force in the length of element is not constant (the axial force is calculated according to forms (28,29)), the expressions of geometrical stiffness matrix become very complicated.

Analysis of geometrically non-linear system of finite elements is described by algebraic equation (42). Usually expression of non-linear deformation is investigated as a process varying in time t , where outer load F and deflections U are functions of time: $F=F(t)$ and $U=U(t)$. Load in the moment of time $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ is added in portions (43). Deflections are expressed by analogy with (44). Non-linear model (42) is expressed by increments (45). Vector of residuals γ reflects solution of equation (42) inadequacy of state variables. Nowadays there exists many algorithms of different complexity for solution of non-linear problems [2-4,9,10]. The majority of methods

that have already become standard uses different Newton-type variety of algorithms. Classical Newton-type algorithms are adapted to non-linear process with so called "softening" curve to model (Fig 2a). In the work there was done and realised a combined algorithm for non-linear process with "hardening" or "softening" curve to model. The illustration of algorithm is given in Fig 3. Using the algorithm in every load step, tangent stiffness matrix is counted twice. The first matrix corresponds to tangent of load step at the beginning (tangent 1), and the second one to the step at the end (tangent 2). Algorithm is implemented in the program created by the authors.

A simple cantilever beam (Fig 4) is taken for the test. History of deformation was investigated. The results are given in non-dimensional quantities (Fig 5). Euler's method is realised as a particular case of implemented algorithm. The same example was also solved using program ANSYS, where beam elements are used and described only by two nodes. The results presented show obviously the advantages of three-node element and validity of proposed assumptions.

Audrius MIKOLIŪNAS. Master of Science, Doctoral student. Department of Strength of Materials. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), 11 Saulėtekio Ave, 2040 Vilnius, Lithuania.

Graduate of VGTU, 1994. Master's degree in informatics (1996) at VGTU.

Rimantas KAČIANAUSKAS. Doctor Habil, Professor, Head of the Department of Strength of Materials. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), 11 Saulėtekio Ave, 2040 Vilnius, Lithuania.

Doctoral thesis on structural mechanics (1982). Doctor's Habil degree at VGTU (computer methods in structural mechanics, 1996). Research visits to University of Stuttgart and Swiss Federal Institute of Technology, Zurich. Research interests: computational mechanics, finite element method, computer modelling of structures and processes.