

ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR ELASTIC-PLASTIC FRAMED STRUCTURES

R. Karkauskas

To cite this article: R. Karkauskas (1998) ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR ELASTIC-PLASTIC FRAMED STRUCTURES, *Statyba*, 4:1, 36-42, DOI: [10.1080/13921525.1998.10531377](https://doi.org/10.1080/13921525.1998.10531377)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1998.10531377>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 66



Citing articles: 2 [View citing articles](#) [↗](#)

TAMPRIAI PLASTINIŲ GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ ANALIZĖ

R. Karkauskas

1. Įvadas

Šiuolaikinės kompiuterių technikos naudojimas įgalina nauju lygiu atlikti konstrukcijos, patyrusios plastines deformacijas, įtempimų ir deformacijų būsenos (ĮDB) analizę. Reikia pažymėti, kad ši konstrukcijos darbo būseną yra labai svarbi projektuojant. Reikalas toks, kad kai kurių medžiagų konstrukcijos dar iki suirimo įgauna labai didelius poslinkius ir gali netenkinti normalaus eksploatavimo reikalavimų. Todėl konstrukcijos skaičiavimas, primant mažų poslinkių hipotezę, tampa mažai patikimu. Be to, daugelyje eksploatuojamų konstrukcijų gali atsirasti plastinių deformacijų, ir jas reikia mokėti įvertinti projektuojant. Dėl to tampriai plastinių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose, šalia stiprumo sąlygų, turi būti įvertintos ir konstrukcijos deformuotąją būseną apibūdinančios standumo sąlygos. Tam savo ruožtu reikalinga ĮDB analizė bet kuriai konstrukcijos plastinio deformavimo stadijai, imtinai iki jos suirimo.

Kaip žinoma, disipacinių sistemų ĮDB priklauso nuo apkrovimo istorijos. Sprendžiant kietojo deformuojamo kūno mechanikos ekstreminių energetinių principų pagrindu [1]-[8] sudarytus disipacinių sistemų analizės ekstremumo uždavinius su globalinėmis išorinių apkrovų reikšmėmis, neįmanoma tiesiogiai fiksuoti pjūvių nusikrovimo, kai holonominės elgsenos reikalavimai yra pažeisti. Prarandama galimybė atsižvelgti į konstrukcijos deformuotosios būsenos kitimą ir įvertinti įvairius plastiško tekėjimo režimus, pasibaigiančius anksčiau, nei pasiekiamos galutinės apkrovų reikšmės. Dėl to liekamųjų poslinkių reikšmės gali būti labai netikslios.

Siūlomas geometriškai netiesinių konstrukcijų ĮDB analizei papildomas apkrovos metodas leidžia įvertinti minėtus trūkumus. Tuo tikslu sudaromos analizės uždavinių matematinių modelių statinės ir kinematinės formuluotės. Jos grindžiamos dualiais ekstreminiais energetiniais principais apie papildomos

energijos prieaugio minimumą ir pilnutinės potencinės energijos prieaugio minimumą. Atitinkamai šie principai išreiškiami per liekamųjų įrašų, liekamųjų deformacijų ir liekamųjų poslinkių prieaugius tam tikru apkrovimo etapu. Numatoma prielaida, kad konstrukcijos diskretinio modelio poslinkiai yra dideli, o strypų deformacijos mažos.

2. Konstrukcijos diskretinio modelio pagrindiniai ieškomieji dydžiai ir priklausomybės

Tampriai plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų plastinio deformavimo trajektorija nagrinėjama etapais, taikant papildomos apkrovos metodą. Pasirenkamas apkrovos žingsnis ΔF . Nuosekliai didinant apkrovą šiuo žingsniu, randami įrašų ir poslinkių prieaugiai.

Tarkime, kad plastinio deformavimo v -tojo etapo gale konstrukcijos diskretinio modelio įtempimų būseną yra aprašoma n -mačiu tikrųjų įrašų vektoriumi

$$\mathbf{S}_v = \mathbf{S}_{rv} + \mathbf{S}_{ev}. \quad (1)$$

Čia $\mathbf{S}_{rv} = \mathbf{S}_{r\Sigma} + \Delta\mathbf{S}_{rv}$ – liekamųjų įrašų vektorius v -tojo etapo gale, kuris lygus liekamųjų įrašų vektoriaus

v -ojo etapo pradžioje $\mathbf{S}_{r\Sigma} = \sum_{z=1}^{v-1} \Delta\mathbf{S}_{rz}$ ir liekamųjų

įrašų v -ojo etapo metu prieaugių vektoriaus $\Delta\mathbf{S}_{rv}$ sumai; $\mathbf{S}_{ev} = \mathbf{S}_{e\Sigma} + \Delta\mathbf{S}_{ev}$ – tampriojo skaičiavimo,

įvertinančio konstrukcijos deformuotosios būsenos kitimą v -ojo etapo gale, įrašos, kurias sudaro tampriojo skaičiavimo įrašos v -ojo etapo pradžioje

$\mathbf{S}_{e\Sigma} = \sum_{z=1}^{v-1} \Delta\mathbf{S}_{ez}$ ir tampriojo skaičiavimo įrašų prieau-

giai $\Delta\mathbf{S}_{ev}$ v -uoju etapu. Paprastai deformavimo proceso pradžioje vektoriai $\mathbf{S}_{r\Sigma} = \mathbf{0}$ ir $\mathbf{S}_{e\Sigma} = \mathbf{0}$.

Konstrukcijos diskretinio modelio v -ojo etapo deformuotoji būseną apibūdinama m -mačiu tikrųjų poslinkių vektoriumi

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{u}_{rv} + \mathbf{u}_{ev}. \quad (2)$$

Čia $\mathbf{u}_{rv} = \mathbf{u}_{r\Sigma} + \Delta\mathbf{u}_{rv}$ – liekamųjų poslinkių vektorius v -ojo etapo gale, $\mathbf{u}_{r\Sigma} = \sum_{z=1}^{v-1} \Delta\mathbf{u}_{rz}$ – suminis liekamųjų poslinkių vektorius v -ajam etapui, o $\Delta\mathbf{u}_{rv}$ – liekamųjų poslinkių prieaugiai v -ojo etapo metu; $\mathbf{u}_{ev} = \mathbf{u}_{e\Sigma} + \Delta\mathbf{u}_{ev}$ – tampriojo skaičiavimo poslinkiai, susidedantys iš suminių poslinkių v -ojo etapo pradžiai $\mathbf{u}_{e\Sigma} = \sum_{z=1}^{v-1} \Delta\mathbf{u}_{ez}$ ir poslinkių prieaugių v -ojo etapo metu $\Delta\mathbf{u}_{ev}$. Deformavimo proceso pradžiai vektoriai $\mathbf{u}_{r\Sigma} = 0$ ir $\mathbf{u}_{e\Sigma} = 0$.

Geometriškai netiesinių tamprių konstrukcijų poslinkių ir įrašų skaičiavimo metodika yra pateikta [9] darbe:

$$\Delta\mathbf{u}_{ev} = \left\{ [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} [A(u_\Sigma)^T] \right\}^{-1} \mathbf{F}_v - \left\{ [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} [A(u_\Sigma)^T] \right\}^{-1} [A(u_\Sigma)] \mathbf{S}_{e\Sigma}, \quad (3)$$

$$\Delta\mathbf{S}_{ev} = [D]^{-1} [A(u_\Sigma)]^T \Delta\mathbf{u}_{ev}. \quad (4)$$

Čia $[A(u_\Sigma)] - (m \times n)$ matmenų v -ojo apkrovimo etapui pusiausvyros sąlygų matrica, kuri sudaroma, naudojant deformuotą diskretinį modelį su poslinkių dydžiais $\mathbf{u}_\Sigma = \sum_{z=1}^{v-1} (\Delta\mathbf{u}_{rz} + \Delta\mathbf{u}_{ez})$, gautais susumavus visų prieš tai buvusių deformavimo etapų poslinkių prieaugių dydžius; $[D] - (n \times n)$ matmenų nekintanti konstrukcijos diskretinio modelio elementų pasiduo-damumo matrica; $\mathbf{F}_v = \sum_{z=1}^v \Delta\mathbf{F}_z$ – v -ojo etapo suminė apkrova.

Taigi geometriškai netiesinių konstrukcijų tikrąją įtempimų ir deformacijų būseną apibūdina pagrindiniai nežinomieji: liekamųjų įrašų prieaugiai ir liekamųjų poslinkių prieaugiai.

Liekamųjų įrašų vektorius \mathbf{S}_{rv} bet kuriuo konstrukcijos deformavimo etapu yra savaiminėje pusiausvyroje ir tenkina pusiausvyros lygtį $[A(u_\Sigma)] \mathbf{S}_{rv} = 0$. Įvertinus lygybę $\mathbf{S}_{rv} = \mathbf{S}_{r\Sigma} + \Delta\mathbf{S}_{rv}$, turėsime, kad statiškai galimas liekamųjų įrašų prieaugių vektorius $\Delta\mathbf{S}_{rv}$ v -uoju etapu turi tenkinti tokią pusiausvyros lygtį:

$$[A(u_\Sigma)] \Delta\mathbf{S}_{rv} = -[A(u_\Sigma)] \mathbf{S}_{r\Sigma}. \quad (5)$$

Atkreipiame dėmesį, kad (5) lygybės dešinėje pusėje yra žinomas dydis.

Užrašant geometriškai netiesinių konstrukcijų takumo sąlygas, reikia įvertinti tiek lenkimo momentų, tiek ir ašinių jėgų įtaką. Tuomet tariant, kad gniuždomos ir tempiamos medžiagos takumo ribos yra vienodos, tiesinėms takumo sąlygoms $[\Phi] \mathbf{S}_v = \mathbf{S}_0$, įvertinus (1) ir (2) lygybes, suteiksime šią matricinę formą:

$$[\Phi] \Delta\mathbf{S}_{rv} \leq \mathbf{S}_0 - [\Phi] (\mathbf{S}_{r\Sigma} + \mathbf{S}_{ev}). \quad (6)$$

Čia $[\Phi] - (n_i \cdot n_k \times n)$ matmenų takumo sąlygų matrica, kurios išraiška priklauso nuo skerspjūvio formos ir ištiesinimo laipsnio n_i ; n_k – skaičiuojamųjų pjūvių ar taškų, kuriuose turi būti patikrintos takumo sąlygos, skaičius; $\mathbf{S}_0 - n_i \cdot n_k$ matavimų žinomas ribinių įrašų vektorius.

3. Analizės uždavinio dualūs matematiniai modeliai

Tikrasis liekamųjų įrašų vektorius konstrukcijoje, dar nepasiekusioje plastinio suirimo būklės, gali būti rastas panaudojus ekstreminį principą apie papildomos energijos minimumą. Mūsų atveju Haaro-Karmano principas [10] formuluojamas taip:

Iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrašų prieaugių vektorių tam tikru plastinio deformavimo proceso etapu tikrasis yra tas, nuo kurio gaunamas minimalus papildomos energijos prieaugis.

Kadangi liekamųjų įrašų prieaugiai sukelia liekamųjų tampriųjų deformacijų prieaugius $\Delta\mathbf{q}_{rev}$, tai papildomos energijos prieaugis bus išreiškiamas skaliarine sandauga $\Delta U_{rv} = 0.5 \Delta\mathbf{S}_{rv}^T \Delta\mathbf{q}_{rev}$. Iš fizinio Huko dėsnio žinome, kad tampriųjų deformacijų prieaugių vektorius $\Delta\mathbf{q}_{rev} = [D] \Delta\mathbf{S}_{rv}$, tuomet

$$\Delta U_{rv} = 0.5 \Delta\mathbf{S}_{rv}^T [D] \Delta\mathbf{S}_{rv}. \quad (7)$$

Kaip žinoma, statiškai leistinas liekamųjų įrašų prieaugių vektorius turi tenkinti pusiausvyros lygtis (5) ir nepažeisti takumo sąlygų (6).

Tokiu būdu suformuluotam principui rašomas šis matematinis modelis:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rasti} \\ \min 0.5 \Delta\mathbf{S}_{rv}^T [D] \Delta\mathbf{S}_{rv}, \\ \text{esant apribojimams} \\ [A(u_\Sigma)] \Delta\mathbf{S}_{rv} = -[A(u_\Sigma)] \mathbf{S}_{r\Sigma}, \\ [\Phi] \Delta\mathbf{S}_{rv} \leq \mathbf{S}_0 - [\Phi] (\mathbf{S}_{r\Sigma} + \mathbf{S}_{ev}). \end{array} \right\} \quad (8)$$

Šio uždavinio tikslo funkcijoje esanti kvadratinė matrica $[D]$ yra teigiamai apibrėžta. Todėl pagal Silvesterio kriterijų uždavinio kvadratinė forma (tikslo funkcija) yra griežtai iškila. Apribojimus sudaro tiesinės funkcijos. Taigi turime tipišką kvadratinio programavimo uždavinį, kurio sprendinys ΔS_{rv}^* bus vienintelis.

Konstrukcijos poslinkiams rasti sudaromas dualus uždavinys, naudojant Lagranžo funkciją (8) uždaviniui. Lagranžo daugikliai yra: pusiausvyros lygtims - liekamųjų poslinkių prieaugių vektorius Δu_{rv} , takumo sąlygoms - plastinių daugiklių prieaugių vektorius $\Delta \lambda_v$. Taigi Lagranžo funkcija yra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta S_{rv}, \Delta u_{rv}, \Delta \lambda_v) \equiv & 0,5 \Delta S_{rv}^T [D] \Delta S_{rv} - \\ & - \Delta u_{rv}^T [A(u_\Sigma)] (\Delta S_{rv} + S_{r\Sigma}) - \Delta \lambda_v^T S_0 + \\ & + \Delta \lambda_v^T [\Phi] (\Delta S_{rv} + S_{r\Sigma} + S_{ev}). \end{aligned}$$

Lagranžo funkcijos stacionarumo sąlygos yra tokia lygčių sistema:

$$[D] \Delta S_{rv} + [\Phi]^T \Delta \lambda_v - [A(u_\Sigma)]^T \Delta u_{rv} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Pažymėję liekamųjų deformacijų prieaugių vektorių $\Delta q_{rv} = [D] \Delta S_{rv} + \Delta q_{pv}$, kur plastinių deformacijų prieaugių vektorius $\Delta q_{pv} = [\Phi]^T \Delta \lambda_v$, gauname geometriškai netiesinių sistemų deformacijų ir poslinkių prieaugių darnos lygtis v -uoju deformavimo proceso etapu:

$$\Delta q_{rv} - [A(u_\Sigma)]^T \Delta u_{rv} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Iš čia akivaizdu, kad papildomos apkrovos metodo geometrinė lygčių matrica yra nagrinėjamos konstrukcijos pusiausvyros lygčių transponuotoji matrica.

Įvertinus Lagranžo funkcijos stacionarumo sąlygas (9), gaunamas toks dualus uždavinys:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rasti} \\ \max - 0,5 \Delta S_{rv}^T [D] \Delta S_{rv} - \Delta \lambda_v^T (S_0 - \\ \quad - [\Phi] S_{ev}) - \Delta S_{rv}^T [D] \Delta S_{r\Sigma} \\ \text{esant apribojimams} \\ [D] \Delta S_{rv} + [\Phi]^T \Delta \lambda_v - [A(u_\Sigma)]^T \Delta u_{rv} = \mathbf{0}, \\ \quad \Delta \lambda_v \geq \mathbf{0}. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Šio uždavinio tikslo funkcija yra sudaryta iš kvadratinė formų sumos ir tiesinės lygties. Kaip jau minėta, matrica $[D]$ yra teigiamai apibrėžta. Taigi

(11) uždavinio tikslo funkcija yra iškila ir uždavinys turi vienintelį sprendinį. Jį suradus, nustatomi pagrindiniai nežinomieji, t.y. ΔS_{rv}^* , Δu_{rv}^* , $\Delta \lambda_v^*$. Po to tikrosios įrašos ir tikrieji poslinkiai baigiant v -ąjį etapą skaičiuojami pagal (1) ir (2) formules. Šio etapo pabaigoje plastinių deformacijų vektorius q_{pv} ir kinematiškai darnių liekamųjų deformacijų vektorius q_{rv} yra skaičiuojami taip:

$$q_{pv} = \sum_v [\Phi] \Delta \lambda_v, \quad q_{rv} = [D] \Delta S_{rv} + q_{pv}. \quad (12)$$

Aptarsime (11) uždavinio fizinę prasmę. Jo apribojimų pirmoji sąlyga yra geometrinės lygtys. Jos drauge su apribojimais $\Delta \lambda_v \geq \mathbf{0}$ apibūdina kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių prieaugių vektorių. Tikslo funkcija reiškia papildomo darbo prieaugį v -ojo plastinio deformavimo etapo pabaigoje. Taigi (11) uždavinio matematinis modelis atitinka tokį ekstreminį energetinį principą:

Iš visų kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių prieaugių vektorių tam tikru nenusikraunancios konstrukcijos etapu tikrasis yra tas, kuriam esant papildomo darbo prieaugis minimalus.

Pakeitę (11) uždavinio tikslo funkcijos ženklą į priešingą, gausime ekstreminį principą apie pilnutinės potencinės energijos minimumą:

Iš visų kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių prieaugių vektorių tam tikru konstrukcijos deformavimo proceso etapu tikrasis yra tas, kuriam esant pilnutinės potencinės energijos prieaugis minimalus.

4. Skaičiavimo algoritmas

Aptarsime dualių ekstreminių uždavinių poros (8) ir (11) sprendimą. Visų pirma iš (11) uždavinio apribojimų pirmosios sąlygos (geometrinių lygčių) išreiškiame liekamųjų įrašų prieaugių vektorius:

$$\Delta S_{rv} = [D]^{-1} [A(u_\Sigma)]^T \Delta u_{rv} - [D]^{-1} [\Phi]^T \Delta \lambda_v. \quad (13)$$

Antra, iš (8) uždavinio apribojimų pirmosios sąlygos - pusiausvyros lygčių, naudojant (13) išraišką, galima gauti liekamųjų poslinkių prieaugių vektorius:

$$\Delta u_{rv} = [\beta(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} [\Phi]^T \Delta \lambda_v - [\beta(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] S_{r\Sigma}, \quad (14)$$

kur $[\beta(u_\Sigma)] = \{ [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} [A(u_\Sigma)]^T \}^{-1}$ yra poslinkių influentinė matrica v -ajam deformavimo etapui. Šią priklausomybę išrašę į (13) lygtį, turime:

$$\begin{aligned} \Delta S_{rv} &= \left\{ [\alpha(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} - [D]^{-1} \right\} [\Phi]^T \Delta \lambda_v - \\ &\quad - [\alpha(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] S_{r\Sigma} = \\ &= [H(u_\Sigma)] [\Phi]^T \Delta \lambda_v - [\alpha(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] S_{r\Sigma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Čia panaudoti šie žymėjimai:

$$[\alpha(u_\Sigma)] = [D]^{-1} [A(u_\Sigma)^T] \left\{ [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} [A(u_\Sigma)^T] \right\}^{-1},$$

$$[H(u_\Sigma)] = [\alpha(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] [D]^{-1} - [D]^{-1}.$$

Tai atitinkamai yra įrašų influentinė matrica ir konstrukcijos diskretinio modelio standumo matrica v – ajam deformavimo etapui.

Iš (14) ir (15) lygties akivaizdu, jog konstrukcijos liekamųjų poslinkių ir liekamųjų įrašų prieaugiai yra tiesinės plastinių daugiklių prieaugių $\Delta \lambda_v$ funkcijos. Šias funkcijas įrašius į (11) matematinį modelį, tamprios plastinės geometriškai netiesinės strypinės konstrukcijos ĮDB analizę galima atlikti pagal tokią modifikuotą matematinį modelį:

$$\left. \begin{aligned} \text{Rasti} \\ \max \quad & 0,5 \Delta \lambda_v^T [\Phi] [H(u_\Sigma)] [\Phi]^T \Delta \lambda_v - \\ & - \Delta \lambda_v^T (S_0 - [\Phi] S_{ev} - [\Phi] S_{r\Sigma}) - \\ & - \Delta \lambda_v^T [\Phi] [\alpha(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] S_{r\Sigma} + c_1 \\ \text{esant apribojimams} \\ & \Delta \lambda_v \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

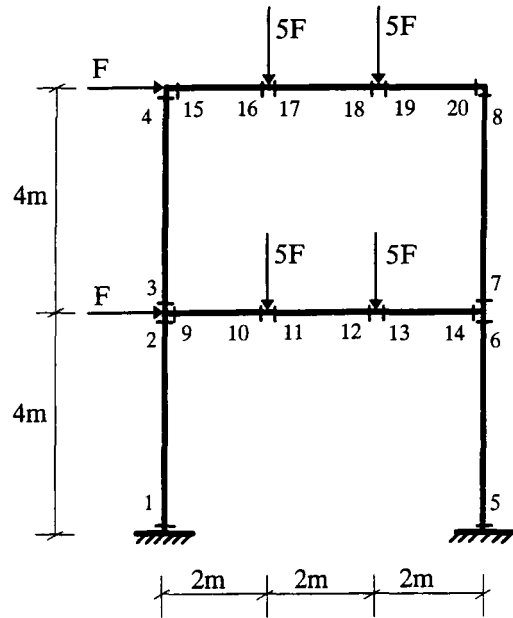
Čia $c_1 = 0,5 S_{r\Sigma}^T [A(u_\Sigma)]^T [\beta(u_\Sigma)] [A(u_\Sigma)] S_{r\Sigma}$ pastovusis dydis, kuris optimizacijos procese gali nedalyvauti.

Taigi gautos modifikacijos tikslo funkcija yra poslinkių daugiklių kvadratinė forma, kurios matrica $[\Phi] [H(u_\Sigma)] [\Phi]^T$ yra teigiamai apibrėžta. Taigi iškiliojo kvadratinio programavimo uždavinio sprendinys bus vienintelis plastinių daugiklių prieaugių v – uoju etapu vektorius $\Delta \lambda_v^*$. Jį suradę, pagal (13) ir (14) formules skaičiuojami ĮDB prieaugiai v – uoju etapu. Tikrasis ĮDB bus gautas pagal (1) ir (2) formules. Sprendimo eigoje keisdami apkrovos prieaugio ΔF_v dydį, galime pastebėti konstrukcijos pjūvių nusikrovimo reiškinį ir jį įvertinti.

5. Pavyzdys

Atliksime gelžbetoninio rėmo, parodyto 1 paveiksle, įtempimų ir deformacijų būsenos analizę

geometriškai tiesinėje ir netiesinėje formuluotėse iki jo galutinio plastinio suirimo. Rėmas projektuojamas iš B20 klasės betono, armavimas - iš A-III klasės armatūros. Betono ir armatūros fiziniai parametrai yra šie: $R_b = 0,9 \cdot 11,5 = 10,35$ Mpa, $E_b = 27 \cdot 10^3$ Mpa, $R_s = R_{sc} = 365$ Mpa, $E_s = 2 \cdot 10^5$ Mpa. Rėmo kolonos yra kvadratinio skerspjūvio $0,3 \times 0,3$ m, armavimas simetrinis, $A_s = A_s' = 36,44$ cm², $a = a' = 4,8$ cm. Rėmo rygeliai yra stačiakampio skerspjūvio $0,3 \times 0,6$ m su dvipuse armatūra, kurios $A_s = 49,25$ cm², $A_s' = 26,63$ cm², $a = 9,2$ cm, $a' = 5,8$ cm.



1 pav. Rėmo geometrija ir diskretinis modelis

Fig 1. Geometry and discrete model

Apkrovoms didėjant nuo nulio iki ribinių reikšmių gelžbetoninės konstrukcijos elemento pavojingoje vietoje įtempimai tempiamoje armatūroje pasiekia takumo ribą, o plyšiai betono tempiamoje zonoje auga iki tokių dydžių, prie kurių betonas iš elemento darbo išsijungia. Šiuo atveju priimame, kad elementas plastiškai suyra, o jo skerspjūvio laikomoji galia yra panaudota tuo pačiu metu ir tempiamos zonos armatūroje ir gniuždomos zonos betone. Armatūra teka, o gniuždomos zonos betonas plastiškai deformuojasi esant pastoviai ribinio lenkimo momento reikšmei

$$M_0 = M_{atl} = R_s A_s \xi, \quad (17)$$

o ribinė ašinė jėga lygi

$$N_0 = N_u = \varphi (R_b A_b + R_{sc} A_s' - R_s A_s); \quad (18)$$

čia A_b – betono gniuždomos zonos plotas; ξ - vidinių jėgų poros petys, kuris pagal gelžbetoninių konstrukcijų teorijos taisykles ([12]) skerspjūviui su dvipuse armatūra yra $\xi = h_0 - a'$; koeficientas $\varphi = 0,9$. Realus stačiakampio skerspjūvio j -oji takumo sąlyga bendru atveju yra netiesinė:

$$M_j + \frac{M_{0,j}}{N_{0,j}} N_j^2 \leq M_{0,j}. \quad (19)$$

Ji yra linearizuojama ir aprašoma tokia matricine tiesine nelygybe:

$$[\Phi_j] \mathbf{S}_j \leq \mathbf{S}_{0,j}, \quad (20)$$

čia $\mathbf{S}_j = \{M_j, N_j\}^T$,

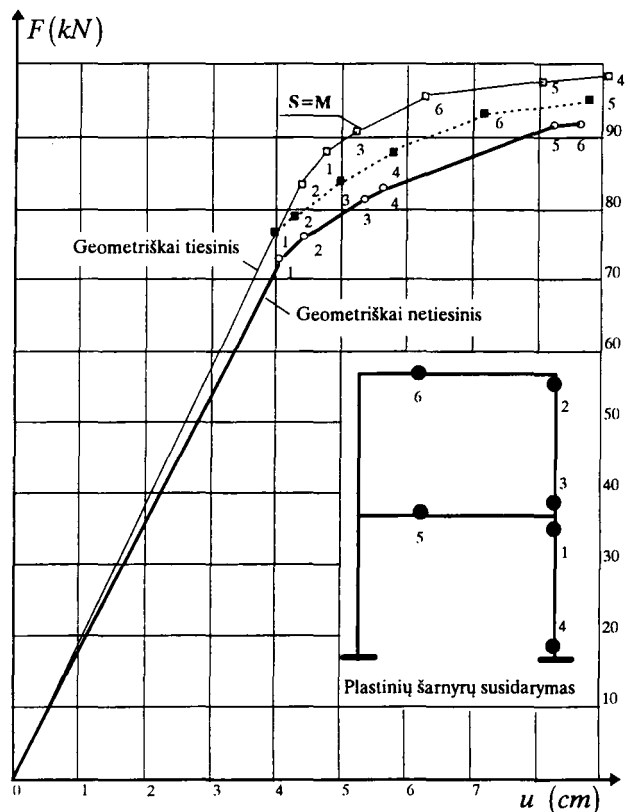
$$[\Phi_j]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2/3 & 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ c & -c & c & -c & 2c & -2c & 2c & -2c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{0,j} = \{M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}, M_{0,j}\}^T,$$

$$c = M_{0,j} / N_{0,j} = \xi$$

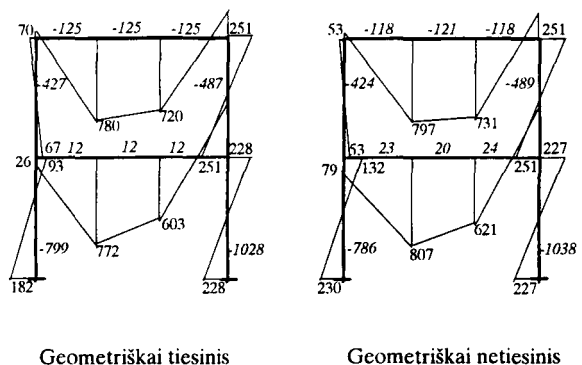
Skaitinis eksperimentas atliktas esant apkrovos priaugiu $\Delta F = 0,01$ kN. Eksperimento metu gauti rezultatai pateikti 2 ir 3 paveiksluose. 2 pav. ištisine linija pavaizduotas rėmo mazgo 4-15 horizontaliojo poslinkio ir apkrovos priklausomybės grafikas ir plastinių šarnyrų susidarymo seka geometriškai netiesinio sprendinio metu. Ten pat yra pavaizduoti geometriškai tiesinio sprendinio rezultatai: punktyrine linija - kai rėmo diskretinio modelio pjūvyje j įvertiname lenkimo momentus ir ašines jėgas; plona ištisine linija - kai įvertiname tik lenkimo momentus. Iš pateiktų grafikų matome, kad geometriškai netiesiniame sistemos sprendinyje rėmo tamprusis darbas pasibaigia esant mažesnei apkrovos parametro F reikšmei. Kartu akivaizdu, kad ir plastinių šarnyrų susidarymas bei rėmo perėjimas į plastinio suirimo mechanizmą įvyksta esant mažesnei apkrovai.

3 pav. pavaizduotas lenkimo momentų pasiskirstymas šešto plastinio šarnyro susidarymo metu, kai apkrovos parametro reikšmė $F = 91,36$ kN. Ten pat kursyvu surašytos gautos ašinių jėgų reikšmės. Iš geometriškai tiesinio sprendinio matome, kad esant šiai apkrovos parametro reikšmei rėme susidaro tik 4 plastiniai šarnyrai, tuo tarpu pagal geometriškai netiesinį sprendinį rėmas esant šiai apkrovai pereina į plastinio suirimo fazę.



2 pav. Apkrovos ir poslinkio priklausomybė plastinio deformavimo proceso metu

Fig 2. Distribution of displacement and the sequence of formation of plastic hinges



3 pav. Įrašų pasiskirstymas prie $F=91,36$ kN

Fig 3. Distribution of total stresses under $F=91,36$ kN

Skaitinio eksperimento metu nustatytos apkrovos parametrų reikšmės ir jas atitinkančios rėmo mazgo 4-15 horizontaliojo poslinkio bei antro aukšto rygelio mazgo 16-17 vertikaliojo poslinkio reikšmės plastinio deformavimo proceso metu, esant įvairioms formuluo-tėms, palyginimui pateiktos lentelėje.

Špl Nr	Dydis	Geometriškai netiesinis	Geometriškai tiesinis			
			M,N	Δ %	M	Δ
1	F	72,16	74,57	3,3	81,70	13,2
	u ₄₋₁₅	4,09	4,01		4,35	
	u ₁₆₋₁₇	1,41	1,44		1,39	
2	F	75,30	76,45	1,5	85,68	13,8
	u ₄₋₁₅	4,42	4,18		4,72	
	u ₁₆₋₁₇	1,47	1,48		1,48	
3	F	80,76	82,34	2,0	89,68	11,0
	u ₄₋₁₅	5,31	5,01		5,24	
	u ₁₆₋₁₇	1,63	1,64		1,57	
4	F	81,74	85,99	5,2	95,60	17,0
	u ₄₋₁₅	5,53	5,72		6,31	
	u ₁₆₋₁₇	1,66	1,75		1,74	
5	F	91,34	92,50	1,3	97,18	6,4
	u ₄₋₁₅	8,16	7,20		8,01	
	u ₁₆₋₁₇	2,01	1,97		3,09	
6	F	91,36	93,38	2,2	97,44	6,7
	u ₄₋₁₅	8,31	8,49	2,2	9,01	8,4
	u ₁₆₋₁₇	2,06	2,83	37,4	3,57	73,3
Ribinis būvis	F	91,38	94,31	3,2	99,78	9,2
	u ₄₋₁₅	8,65	13,99	61,7	23,27	186
	u ₁₆₋₁₇	2,20	5,12	133	9,53	333

6. Išvados

1. Geometriškai netiesinių konstrukcijų ĮDB analizei pasiūlytas papildomos apkrovos metodas leidžia fiksuoti pjūvių nusikrovimą, konstrukcijos deformuotosios būsenos kitimą ir įvertinti įvairius plastinio tekėjimo režimus.

2. Analizės uždavinio matematinių modelių pagrindas kvazistatinės apkrovos atveju yra ekstreminis energetinis principas apie papildomos energijos minimumą. Jis užrašomas statškai leistiniems liekamųjų įrašų prieaugiams. Uždavinio tiesioginė formulotė yra išreiškiama (12) modeliu, o duali - (15). Skaičiavimo algoritmas (20) sudarytas naudojant apibendrintą Lagranžo uždavinį.

3. Atliktas skaitinis eksperimentas patvirtina teorinių tyrimų pagrindines išvadas. Visų pirma matematinis modelis (20) gerai tinka realių konstrukcijų ĮDB analizei, taikant geometriškai netiesinės sistemos ir tampriai plastinės medžiagos fizinio modelio sampratą. Antra, yra pakankamai aiškus, informatyvus ir gali būti taikomas inžinerinėje praktikoje.

Literatūra

- G. Maier. Quadratic programming and theory of elastic-plastic structures // *Meccanica*, 3, 1968, p. 265-273.
- M. Capurso. A displacement bounding principle in shakedown shakedown of structures subjected to cyclic loads // *Int. J. Solids Struct.*, 10, 1974, p. 77-92.
- А.М. Проценко. Теория упруго-идеальнопластических систем. М.: Наука, 1982. 288 с.
- A. Čyras. Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1983, 121 p.
- A. Borkowski. Analysis of skeletal structural systems in the elastic and elastic-plastic ranges. Warszawa: PWN-Elsevier, 1988. 200 p.
- С. Каланта. Двойственные математические модели задач анализа упругопластических конструкций с разрывными полями перемещений // *Statyba (Строительство)*, № 3 (3), 1995. Вильнюс: Техника, с. 5-29.
- E. Raue and H. Schuler. Mathematical programming methods for the analysis of elastic-plastic r/c structures allowing for second order geometric effects // *Modern building materials, structures and techniques. Proceedings of the IV Int. Conf.*, Vilnius, 1995. Vol. 3. Vilnius: Technika, 1995, p. 183-188.
- J. Atkočiūnas. Energy interpretation of complementarity condition in shakedown problems // *Statyba*, Nr. 1 (9), 1997, Vilnius: Technika, p. 14-25.
- R. Karkauskas. On the analysis of geometrically nonlinear structures // *Statyba*, Nr. 4 (12), 1997, Vilnius: Technika, p. 38-43.
- A. Haar, von Th. Karman. Zur theorie der spannungszustande in plastischen und sandartigen median // *Nachr. Der Wiss. Zu Gottingen, Math.-phys. Klasse*, 204, 1909.
- J. Atkočiūnas, R. Karkauskas. Principle von Haar-Karman in analysis of elastic-plastic unloading frame// *Modern building materials, structures and techniques. Proceedings of the III Int. Conf.*, Vilnius, 1993. Vol. 3. Vilnius: Technika, 1993, p. 175-181.
- А.П. Кудзис. Железобетонные и каменные конструкции. М.: Высш. шк., 1988. 287 с.

Įteikta 1997 12 20

ANALYSIS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR ELASTIC-PLASTIC FRAMED STRUCTURES

R. Karkauskas

S u m m a r y

A stress-strain field (SSF) evaluation of elastic-plastic structures under the action of a completely specified external loading that doesn't exceed its limiting value, but produces plastic deformation, is under consideration. An assumption of the discrete structure, possessing the small bar strains and large displacements assumptions, is applied.

It is known that for dissipative structures SSF depends on the loading history. When solving the analysis extremum problems on the basis of extreme energetical principles [1]-

[8] for global external loads (final load magnitudes) one cannot fix directly the unloading phenomenon in cross-sections. Therefore, the possibilities to evaluate the SSF change of the structure, as well as the possibility to take into account various plastic deformation stages, finishing prior to the stage when the final magnitudes of loads are achieved, are lost. Therefore, the residual displacement magnitudes, obtained by solving the problem for global loads only, can be determined only very approximately.

The proposed in the manuscript complementary load method to investigate the SSF for geometrically non-linear structure enables to avoid the above-mentioned negative aspects. Applying the method, design process of a structure is iterative step-by-step procedure. A load step ΔF is introduced. Monotonically increasing the load by step ΔF , increments of SSF are obtained. The analysis problem in static and kinematic formulations is stated for this purpose. Formulations are based on the dual extreme energetic principles formulated for residual strains and residual displacements increments for any structure deformation stage.

The actual field of residual forces proceeding the plastic failure is obtained by using the extreme principle of the minimum of complementary energy increment - the static formulation (8). Applying the Lagrange function of this formulation, the dual problem is formulated to determine the displacements of the structure. Thus the mathematical model (11) corresponds to the extremum principle of a maximum of complementary work increment.

Changing the sign of the objective function the problem (11) corresponds to the extremum principle of a minimum of total complementary energy increment. Finally, we conclude that increments of residual forces (15) and displacements (14) are the linear functions only one of plastic multipliers $\Delta\lambda_\nu$. By substituting that functions into problem (11) the elastic-plastic geometrically non-linear framed structures SSF analysis problem can be transformed to modified problem (16). Then applying formulae (14) and (15) the SSF increments for the ν -th step are determined. The actual SSF is obtained applying the relationships (1) and (2).

The SSF analysis problem for a two-storey frame made of reinforcement concrete at the stage prior to plastic collapse is presented for the numerical example. Numerical experiments show that proposed mathematical model (16) allows to determine the actual forces and displacements for real structures and to achieve sufficient results for practical design needs.

Romanas KARKAUSKAS. Doctor, Associate Professor. Department of Structural Mechanics. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, 2040 Vilnius, Lithuania. Dr degree in 1972 (structural mechanics). Research visits: Warsaw Politechnic Institute, Moscow Civil Engineering Institute, Kiev Civil Engineering Institute. Research interests: analysis and optimization of elastic-plastic structures, computational mechanics.